
排队论基础
孙荣恒 李建平 著
科学出版社

现代数学基础丛书

排队论基础

孙荣恒　李建平　著

科学出版社

北京

内　容　简　介

本书系统地介绍排队论的概念、理论和方法.内容包括:预备知识、$M/M/\cdot$系统、$M/G/1$系统、具有假时间的$M/G/1$系统、$G/M/m$系统、离散时间排队系统.本书论述严谨、深入浅出,还包含了作者的研究成果.

本书读者对象为大专院校概率统计、应用数学和管理科学等专业的大学生、研究生、教师和有关科技工作者.

图书在版编目(CIP)数据

排队论基础/孙荣恒,李建平著.—北京:科学出版社,2002
(现代数学基础丛书)
ISBN 7-03-010275-4

Ⅰ.排… Ⅱ.①孙…②李… Ⅲ.排队论 Ⅳ.O226

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第016490号

责任编辑:刘嘉善/责任校对:陈丽珠
责任印制:安春生/封面设计:王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2002年10月第 一 版　开本:850×1168　1/32
2002年10月第一次印刷　印张:7 7/8
印数:1－2 500　字数:200 000

定价:20.00元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前　　言

排队论是运筹学的重要组成部分．20世纪初丹麦数学家、电气工程师爱尔朗(A．K．Erlang)把概率论应用于电话通话问题，从而开创了这门应用数学科学．20世纪30年代中期，当费勒(W．Feller)引进了生灭过程时，排队论才被数学界承认为一门重要的学科．20世纪40年代排队论在运筹学这个新领域中成了一个重要的部分．20世纪50年代初肯德尔(D．G．Kendall)对排队论作了系统的研究．他用马尔柯夫(A．A．Markov)链方法研究排队论，使排队论得到进一步的发展．20世纪60年代起排队论研究的课题日趋复杂，很多问题很难求得精确解，因此开始了近似方法的研究．

排队论应用范围很广．它适用于一切服务系统．尤其在通信系统、交通系统、计算机存储系统和生产管理系统等方面应用得最多．

本书是排队论研究的一本专著．着重介绍了排队论的基本概念、基本理论、基本方法和当前研究的主要结果(其中相当一部分内容是作者近年来的研究成果)．本书共六章，其内容有：预备知识、$M/M/\cdot$ 系统、$M/G/1$ 系统、具有假时间的 $M/G/1$ 系统、$G/M/m$ 系统、离散时间排队系统．

本书曾以讲稿形式为重庆大学、中国人民解放军后勤工程学院研究生讲授过多次，后经过数次修改才成现在这样．在撰写过程中，作者力求系统严谨、深入浅出、通俗易懂，希望本书能成为学习排队论的一本好的入门书．后勤工程学院国际小波分析应用研究中心翟江涛、许川容、汪益川、王会云、潘伟等为本书做出了贡献．

徐光辉教授审阅了全书，提出了一些宝贵意见，中国人民解放

军后勤工程学院的翟江涛、许川容、汪益川、王会云、潘伟和重庆大学的潘致锋等打印和校对了书稿，作者在此一并表示衷心感谢！对于科学出版社的热忱支持，作者亦表示衷心感谢！

本书得到国家自然科学基金项目(69903012)和重庆市信息产业发展基金项目(200113012)资助出版．由于作者水平有限，本书的缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正．

孙荣恒　李建平

2001年6月18日

目　录

引 言

一、排队论发展简介

排队论起源于20世纪初的电话通话.1909—1920年丹麦数学家、电气工程师爱尔朗(A. K. Erlang)用概率论方法研究电话通话问题,从而开创了这门应用数学学科,并为这门新学科建立了许多基本原则.30年代中期,当费勒(W. Feller)引进了生灭过程时,排队论才被数学界承认为一门重要的学科.在二战期间和二战以后,排队论在运筹学这个新领域中成了一个重要的内容.20世纪50年代初肯德尔(D. G. Kendall)对排队论作了系统的研究,他用嵌入马尔可夫(A. Markov)链方法研究排队论,使排队论得到了进一步发展.他首先用三个字母组成的符号表示排队系统.20世纪60年代起,排队论研究的课题日趋复杂,很多问题不是很难求得其精确解,就是求得的解非常复杂,不便于应用.因而开始了近似方法的研究.

排队论的产生与发展来自实际的需要.实际的需要也必将决定它今后的发展方向.排队论应用范围很广.它应用于一切服务系统.尤其在通信系统、交通系统、计算机、存储系统、生产管理等方面应用得最多.

二、排队系统的组成部分

一般排队系统由输入过程与到达规则、排队规则、服务机构的结构、服务时间与服务规则组成.

1. 输入过程与到达规则.输入过程一般是用(顾客)到达间隔时间来描述的.根据到达间隔时间所服从的分布,输入过程可分为定长输入、(负)指数输入(Poisson输入)、爱尔朗输入、几何输入(Bernoulli输入)、负二项输入与一般输入.到达规则是指在这些输

入的每一种中又可分为单个到达、成批到达、依时到达、移态到达等.今后如不特别说明,到达均为单个的,即每次只到达一个顾客.

2. 排队规则.排队规则一般分为等待制、损失制和混合制.在等待制与混合制中通常又可分为先来先服务(FCFS)、后来先服务(LCFS)、随机服务(ROS)、优先非抢占服务、优先抢占服务等.在混合制中又分为队长(容量)有限、等待时间有限.此外,还有顾客服务后反馈以及共同占用、占而不用等等.今后,如不特别说明,总认为系统的排队规则为等待制先来先服务.

3. 服务机构的结构.服务机构的结构可分为单服务台、有限个服务台与无限多个服务台.而在(有限)多个服务台中又可分为并联、串联两种.今后,如不特别说明,服务台均为并联的.

4. 服务时间与服务规则.服务时间是指服务一个顾客所用的时间.根据其分布,一般分为定长分布、指数分布、几何分布与一般分布等.服务规则分为有假时间与无假时间两类.在有假时间中又可分为穷尽服务、门限服务、有限服务、减量(decrementing)服务.而在穷尽服务和门限服务中又可分为单假时间与多假时间两种.在上述各种情形中又可分为单个服务与成批服务.今后,如无特别说明均指无假时间单个服务.

三、排队系统的表示方法

1951 年肯德尔用三个字母组成的符号 $A/B/C$ 表示排队论系统.其中 A 表示到达间隔时间分布,B 表示服务时间的分布,C 表示服务机构中服务台的个数.一般用 D 表示定长分布,用 M 表示指数分布,用 Geo 表示几何分布,用 E_r 表示 r 阶爱尔朗分布,用 H_R 表示 R 相超指数分布,用 G 表示一般分布.例如,$M/M/n$ 表示到达间隔时间与服务时间均服从指数分布(参数一般不相同)且服务机构有 n 个服务台的排队系统;$M/G/1$ 表示到达间隔时间服从指数分布服务时间服从一般分布,服务机构只有一个服务台的排队论系统.后来人们在三个字母后面又加了两个字母,分别表示系统的容量和输入源中的顾客数,并且在前两个字母的右上角加字母以表示每次到达几个顾客与每次服务几个顾客.例如,

$M^{\xi}/G^{\eta}/1/m/N$表示该系统的到达间隔时间服从指数分布，每次到达ξ(ξ可以是随机变量)个顾客，服务时间服从一般分布，每次服务η(η可以是随机变量)个顾客，服务机构只有一个服务台且最多只能容纳m个顾客，输入源最多只有N个顾客. 如果只有前三个字母，则表示系统的容量和输入源中的顾客数均为无限.

一般还假设到达间隔时间序列$\{J_i, i\geqslant 1\}$为独立同分布随机变量序列，服务时间序列$\{B_i, i\geqslant 1\}$也为独立同分布随机变量序列且这两个随机变量序列也相互独立.

四、排队系统的主要指标

评价一个排队系统的好坏要以顾客和服务机构两方面利益为标准. 就顾客来说，总希望等待时间或逗留时间越短越好，从而希望服务台个数尽可能多些. 但是，就服务机构来说，增加服务台数，就意味着增加投资，增加多了要造成浪费，增加多少比较好呢? 顾客与服务机构为了照顾自己的利益对排队系统中的几个指标：队长、等待时间、服务台的忙期都很关心. 因此，这几个指标就成了排队论的主要研究内容.

1. 队长. 队长是指系统中顾客数，即正在服务的顾客数与等待服务的顾客数之和. 它一般是一个随机变量，通常要求其分布和前两阶矩.

2. 等待时间. 从顾客到达时起一直到他被接受服务时止这段时间称为(该)顾客的等待时间. 而称从顾客到达系统时起一直到他被服务完离开系统时止这段时间为(该)顾客的逗留时间，即顾客的等待时间与服务时间之和. 我们也要求它们的分布和前两阶矩.

3. 忙期. 忙期是指空闲的服务机构从有顾客到达时起一直到服务机构又没有顾客时止这段时间. 与忙期相对应的是闲期. 它是指服务机构从开始没有顾客时起一直到服务机构有顾客时止这段时间. 对于有n个服务台的系统，一般还要讨论其k阶繁忙期. 从系统中开始有k个顾客在等待服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间称为该系统k阶繁忙期. 零阶繁忙期称繁忙期. 忙

期、闲、k 阶繁忙期也是随机变量.一般也要讨论它们的分布与前两阶矩.

当然,对不同的系统,上述三个指标的重要性也是不同的,有时甚至是没有意义的.例如,$M/M/\infty$ 系统与 $M/M/n/n$ 系统,讨论顾客的等待时间都是没有意义的.

第一章　预备知识

§1.1　两个重要的分布

1.1.1　几何分布

如果随机变量 ξ 的分布律为

$$P\{\xi=k\}=pq^{k-1},\quad k=1,2,3\cdots,\quad 0<p<1,\quad q=1-p,\tag{1.1.1}$$

则称 ξ 服从几何分布,记为 $\xi\sim \mathrm{Geo}(p)$,且有

$$E(\xi)=\frac{1}{p},\quad D(\xi)=\frac{q}{p^2}.\tag{1.1.2}$$

定理 1.1.1　设 ξ 为只取正整数值的随机变量.则下列两命题等价:

(1) ξ 服从几何分布.

(2) $P\{\xi>m+n|\xi>n\}=P\{\xi>m\},m,n=0,1,2,\cdots$.

证　(1)⇒(2).设

$$P\{\xi=k\}=pq^{k-1},k=1,2,\cdots,0<p<1,q=1-p.$$

则由条件概率定义,得

$$\begin{aligned}P\{\xi>m+n|\xi>n\}&=\frac{P\{\xi>m+n,\xi>n\}}{P\{\xi>n\}}\\&=\frac{P\{\xi>m+n\}}{P\{\xi>n\}}=\frac{q^{m+n}}{q^n}\\&=q^m=P\{\xi>m\}.\end{aligned}$$

证　(2)⇒(1).由(2)得

$$\frac{P\{\xi>m+n\}}{P\{\xi>n\}}=P\{\xi>m\}.\tag{i}$$

从而得

$$\frac{P\{\xi>m-1+n\}}{P\{\xi>n\}}=P\{\xi>m-1\},(m\geqslant 1),\tag{ii}$$

(ⅱ) − (ⅰ),得

$$\frac{P\{\xi = m + n\}}{P\{\xi > n\}} = P\{\xi = m\},$$

即

$$P\{\xi = m + n\} = P\{\xi = m\}P\{\xi > n\}. \quad (1.1.3)$$

令

$$\tilde{G}(n) = P\{\xi > n\}, \quad \tilde{F}(m) = P\{\xi = m\}, \quad m \geqslant 1.$$

则

$$\tilde{F}(m + n) = \tilde{G}(n)\tilde{F}(m), \quad 且\ \tilde{G}(1) + \tilde{F}(1) = 1.$$

从而

$$P\{\xi = k\} = \tilde{G}(1)\tilde{F}(k-1) = [\tilde{G}(1)]^2\tilde{F}(k-2) = \cdots$$
$$= \tilde{F}(1)[\tilde{G}(1)]^{k-1}, \quad k = 1,2,\cdots$$

所以 ξ 服从参数为 $p = \tilde{F}(1)$ 的几何分布.称 (2) 为几何分布的无记忆性.

定理 1.1.2 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ 为 r 个独立同分布随机变量,且 ξ_1 服从参数为 p 的几何分布.则

$$P\left\{\sum_{i=1}^{r}\xi_i = k\right\} = C_{k-1}^{r-1}p^rq^{k-r},\ k = r,\ r+1,\ r+2,\cdots, q = 1-p.$$

证 当 $r = 2$ 时, $p\{\xi_1 + \xi_2 = k\} = \sum_{i=1}^{k-1} p\{\xi_1 = i, \xi_2 = k - i\}$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} pq^{i-1}pq^{k-i-1} = p^2\sum_{i=1}^{k-1} q^{k-2} = C_{k-1}^{2-1}p^2q^{k-2},\ k \geqslant 2.$$

所以 $r = 2$ 时结论成立.设 $r = n$ 时结论成立.往证 $r = n + 1$ 时结论也成立.因为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\xi_i = k\right\} = P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i + \xi_{n+1} = k\right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{k-n} P\left\{\xi_{n+1} = j, \sum_{i=1}^{n}\xi_i = k - j\right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{k-n} pq^{j-1}C_{k-j-1}^{n-1}P^nq^{k-j-n} = p^{n+1}q^{k-n-1}\sum_{j=1}^{k-n} C_{k-j-1}^{n-1}$$
$$= C_{k-1}^{n}p^{n+1}q^{k-n-1}, k = n+1, n+2, \cdots. 因\left[\sum_{j=0}^{k} C_{n+j}^{n} = C_{n+k+1}^{n+1}\right].$$

1.1.2 指数分布

如果随机变量 ξ 具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, x\leqslant 0,\end{cases}\qquad \alpha>0,$$

则称 ξ 服从参数为 α 的指数分布,记为 $\xi\sim\Gamma(1,\alpha)$ 或 $\xi\sim M(\alpha)$.

定理1.1.3 设 ξ 是非负连续型随机变量. 则下两命题等价:

(1) ξ 服从指数分布.

(2) 对任意实数 $x,y\geqslant 0$,有

$$P\{\xi>x+y|\xi>x\}=P\{\xi>y\}.$$

命题(2) 称为指数分布随机变量的无记忆性.

证 (1)⇒(2), 设 ξ 服从参数为 α 的指数分布,则

$$P\{\xi>x\}=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ e^{-\alpha x}, & x>0.\end{cases}$$

从而,对 $x,y\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}P\{\xi>x+y|\xi>x\}&=P\{\xi>x+y,\xi>x\}/P\{\xi>x\}\\&=P\{\xi>x+y\}/P\{\xi>x\}\\&=e^{-\alpha(x+y)}/e^{-\alpha x}=e^{-\alpha y}=P\{\xi>y\}.\end{aligned}$$

证 (2)⇒(1), 由(2) 成立,得

$$P\{\xi>x+y\}=P\{\xi>x\}P\{\xi>y\},\quad x,y\geqslant 0.$$

记 $\tilde{G}(x)=p\{\xi>x\}$. 则上式变为

$$\tilde{G}(x+y)=\tilde{G}(x)\tilde{G}(y),x,y\geqslant 0,\qquad (1.1.4)$$

且对任意 $x\geqslant 0$,有 $0\leqslant\tilde{G}(x)\leqslant 1$. 设 $y>x\geqslant 0$. 则

$$\tilde{G}(y)=\tilde{G}(y-x+x)=\tilde{G}(y-x)\tilde{G}(x).$$

故

$$\tilde{G}(y)-\tilde{G}(x)=[\tilde{G}(y-x)-1]\tilde{G}(x)\leqslant 0.$$

所以 $\tilde{G}(x)$ 在区间[0, +∞] 内单调不增. 由(1.1.4) 得

$$\tilde{G}(nt)=[\tilde{G}(t)]^n,\quad t\geqslant 0.\qquad (1.1.5)$$

令 $t=\frac{1}{n}$ 得 $\tilde{G}(1)=\left[\tilde{G}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n}$.记 $a=\tilde{G}(1)$,得 $\tilde{G}\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}$.由(1.1.4)得 $\tilde{G}(mt)=[\tilde{G}(t)]^{m}$,令 $t=\frac{1}{n}$,得

$\tilde{G}\left(\frac{m}{n}\right)=\left[\tilde{G}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{m}=a^{m/n}$.此示,对任意有理数 $r>0$,有

$$\tilde{G}(r)=a^{r}. \tag{1.1.6}$$

由于 $\tilde{G}(x)$ 单调不增,所以对任意实数 $x>0$,取有理数列 r_n 与 r'_n 使得 $r'_n\uparrow x, r_n\downarrow x$,则有

$$\tilde{G}(r_n)\leqslant\tilde{G}(x)\leqslant\tilde{G}(r'_n),$$

即

$$a^{r_n}\leqslant\tilde{G}(x)\leqslant a^{r'_n}.$$

令 $n\to\infty$,取极限得 $\tilde{G}(x)=a^{x}$.

因为 $0\leqslant a=\tilde{G}(1)=P\{\xi>1\}\leqslant1$,由 $\tilde{G}(x)=P\{\xi>x\}=a^{x}, x\geqslant0$,且 ξ 为非负连续型随机变量知 $0<a<1$.

令 $\alpha=-\ln a$.则有

$$a=e^{-\alpha},\tilde{G}(x)=P\{\xi>x\}=e^{-\alpha x},x>0.$$

又因,当 $x\leqslant0$ 时 $P\{\xi<x\}=0$,从而知 $\xi\sim\Gamma(1,\alpha)$.

定理1.1.4 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 n 个独立同分布随机变量,且 $\xi_1\sim\Gamma(1,\alpha)$,则 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sim\Gamma(n,\alpha)$,即 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 为具有密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n}x^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0 & x\leqslant0,\end{cases}\quad \alpha>0 \tag{1.1.7}$$

的 n 阶爱尔朗随机变量,其中 $\Gamma(n)=\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$,称 $\Gamma(n)$ 为参数是 n 的 Γ 函数.

对于 Γ 函数有如下公式:

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{1.1.8}$$

证 当 $n=2$ 时,$\xi_1+\xi_2$ 的密度函数为

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x) f_{\xi_2}(z-x)\,dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \alpha^2 e^{-\alpha x} e^{+\alpha x - \alpha z}\,dx \\ = \alpha^2 z e^{-\alpha z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0, \end{cases}$$

$x > 0, z - x > 0$

图 1-1

此示，当 $n = 2$ 时结论成立．设 $n = k$ 时结论成立．往证 $n = k + 1$ 时结论也成立．记 $\eta = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$，则 $\eta \sim \Gamma(k, \alpha)$．因 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{k+1}$ 独 立，所以 η 与 ξ_{k+1}独立．故

$$f_{\eta+\xi_{k+1}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\eta}(x) f_{\xi_{k+1}}(z-x)\,dx,$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \frac{\alpha^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\alpha x} \cdot \alpha e^{(z-x)}\,dx, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha^{k+1} z^k}{\Gamma(k+1)} e^{-\alpha z}, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0, \end{cases}$$

此示，当 $n = k + 1$ 时结论也成立．由数学归纳法定理结论得证．

一般地，如果随机变量 ξ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\beta)}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 0,$$

则称 ξ 服从参数为 β, α 的 Γ 分布，并记为 $\xi \sim \Gamma(\beta, \alpha)$．当 $\beta = n$，n 为正整数时，称 ξ 服从参数为 α 的 n 阶 Erlang 分布．当 $\beta = 1$ 时称 ξ 服从参数为 α 的指数分布．当 $\beta = \frac{n}{2}, \alpha = \frac{1}{2}$ 时称 ξ 服从自由度为 n 的卡方分布，并记为 $\xi \sim \chi^2(n)\left[= \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$．用数学归纳法易证如下定理 1.1.5.

定理 1.1.5 (1) 设 $\xi_i \sim \Gamma(1,\alpha_i)$, $i=1,2,\cdots,n$ 且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立,则

$$\min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \sim \Gamma(1,\sum_{i=1}^n \alpha_i).$$

(2) 设 $\xi_i \sim \mathrm{Geo}(p_i)$, $i=1,2,\cdots,n$,且 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 相互独立,则

$$\min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \sim \mathrm{Geo}(1-\prod_{i=1}^n (1-p_i) = \mathrm{Geo}(1-\prod_{i=1}^n q_i), q_i = 1-p_i$$

证 (1) 因 $\eta_2 \equiv \min(\xi_1,\xi_2)$ 的密度函数为

$$f_{\eta_2}(x) = f_{\xi_1}(x)[1-F_{\xi_2}(x)] + f_{\xi_2}(x)[1-F_{\xi_1}(x)]$$

$$=\begin{cases} \alpha_1 e^{-\alpha_2 x}. e^{-\alpha_2 x} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 x} e - \alpha_1 x = (\alpha_1+\alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)x}, & x>0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

此示 $\eta_2 \doteq \min(\xi_1,\xi_2) \sim \Gamma(1,\alpha_1+\alpha_2)$,即当 $n=2$ 时结论成立.设 $n=k$ 时结论成立,即 $\eta_k = \min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k) \sim \Gamma(1,\sum_{i=1}^k \alpha_i)$,往证 $n=k+1$ 时结论成立.由于 η_k 与 ξ_{k+1} 独立,且 $\xi_{k+1} \sim \Gamma(1,\alpha_{k+1})$,则

$$\begin{aligned} \eta_{k+1} &= \min(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\xi_{k+1}) \\ &= \min(\eta_k,\xi_{k+1}) \sim \Gamma\left(1,\sum_{i=1}^k \alpha_i + \alpha_{k+1}\right) \\ &= \Gamma\left(1,\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\right). \end{aligned}$$

此示 $n=k+1$ 时结论也成立.

证 (2) 因为

$$\begin{aligned} P\{\min(\xi_1,\xi_2)=k\} &= P\{\xi_1=k,\xi_2\geqslant k\} + P\{\xi_2=k,\xi_1>k\} \\ &= p_1 q_1^{k-1}\cdot q_2^{k-1} + p_2 q_2^{k-1}\cdot q_1^k \\ &= (1-q_1q_2)(q_1q_2)^{k-1}, \end{aligned}$$

$k=1,2,3,\cdots$,其中,$q_i=1-p_i$, $i=1,2$.这说明 $n=2$ 时结论成立.剩下的证明其方法与(1)相同.

如果随机变量 ξ 具有密度函数

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^R \beta_i\lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x>0 \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases} \quad \lambda_i>0,\ 0<\beta_i<1 \text{ 且} \sum_{i=1}^R \beta_i = 1,$$

则称服从 R 相(阶)超指数分布.

§1.2 条件数学期望

1.2.1 条件数学期望

设 $F_\xi(x)$ 为随机变量 ξ 的分布函数. 如果 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|dF_\xi(x)<\infty$,则定义 ξ 的数学期望为

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_\xi(x). \tag{1.2.1}$$

上式中的积分称为 Riemann-Stieltjes 积分. 当 ξ 为离散型且取值 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 时,则(1.2.1)式变为

$$E(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP\{\xi=x_i\}. \tag{1.2.2}$$

当 ξ 为连续型且有密度 $f_\xi(x)$ 时,则(1.2.1)式变为

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx. \tag{1.2.3}$$

设 $g(x)$ 为 x 的连续函数. 如 $g(\xi)$ 的数学期望存在,则有

$$E[g(\xi)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF_\xi(x). \tag{1.2.4}$$

设 A,B 为两个事件且 $P(B)>0$,则在事件 B 发生下事件 A 发生的条件概率定义为 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$,记为 $P(A|B)$,即

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.2.5}$$

设 ξ,η 为两个随机变量,由条件概率的定义,在 $\eta=y$ 下 ξ 的条件分布函数定义为

$$P\{\xi<x|\eta=y\}=\begin{cases}\dfrac{P\{\xi<x,\eta=y\}}{P\{\eta=y\}}, & \text{当}(\xi,\eta)\text{为离散型且}P\{\eta=y\}>0,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{f_{\xi,\eta}(t,y)}{f_\eta(y)}dt, & \text{当}(\xi,\eta)\text{为连续型且}f_\eta(y)>0\text{时},\end{cases}$$

(1.2.6)

并记为

$$F_{\xi|\eta}(x \mid y) = p\{\xi < x \mid \eta = y\}. \qquad (1.2.7)$$

由条件分布函数和数学期望的定义,现可给出条件数学期望的定义.

定义 1.2.1 如果$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_{\xi|\eta}(x \mid y) < \infty$,则定义在 $\eta = y$ 下 ξ 的条件数学期望为$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi|\eta}(x \mid y)$. 记为 $E(\xi \mid \eta = y)$,简记为 $E(\xi \mid y)$,即

$$E(\xi \mid y) = E(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi|\eta}(x \mid y). \qquad (1.2.8)$$

因为 $E(\xi \mid y)$是 y 的函数,它的取值依赖于 η. 故当我们把 $E(\xi \mid y)$中的 y 换成 η 时, $E(\xi \mid \eta)$就是 η 的函数且满足关系式:当 $\eta = y$ 时,

$$E(\xi \mid \eta) = E(\xi \mid y),$$

我们称 $E(\xi \mid \eta)$ 为在 η 下 ξ 的条件数学期望.

因 $E(\xi \mid \eta)$ 是 η 的函数,可以证明 $E(\xi \mid \eta)$ 还是随机变量,如果其数学期望存在,则由(1.2.4) 式有

$$E[E(\xi \mid \eta)] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi \mid y) dF_{\eta}(y). \qquad (1.2.9)$$

可以证明:当 $E|\xi| < \infty$ 时,有[1]

$$E[E(\xi \mid \eta)] = E(\xi). \qquad (1.2.10)$$

由(1.2.10) 与(1.2.9) 两式得

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\xi \mid \eta = y) dF_{\eta}(y). \qquad (1.2.11)$$

称(1.2.11) 式为全数学期望公式. 它是一个非常有用的公式.

1.2.2 全概率公式与条件方差

设 A 为任一事件. 令

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases} \tag{1.2.12}$$

称 $I_A(\omega)$ 为 A 的示性函数.常简记 $I_A(\omega)$ 为 I_A,即 $I_A = I_A(\omega)$.因为 $E(I_A) = P(A)$,所以在(1.2.11)式中,当令 $\xi = I_A$ 时,得

$$P(A) = E(I_A) = \int_{-\infty}^{\infty} E(I_A \mid \eta = y) dF_\eta(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid \eta = y) dF_\eta(y).$$

即

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid \eta = y) dF_\eta(y). \tag{1.2.13}$$

称上式为全概率公式.

定义 1.2.2 如果 $E\{[\xi - E(\xi \mid \eta)]^2 \mid \eta\}$存在,则称它为在 η 下 ξ 的条件方差,记为 $D(\xi \mid \eta)$ 即

$$D(\xi \mid \eta) = E\{[\xi - E(\xi \mid \eta)]^2 \mid \eta\}. \tag{1.2.14}$$

定理 1.2.1 如果 $E(\xi^2) < \infty$,则

$$D(\xi) = E[D(\xi \mid \eta)] + D[E(\xi \mid \eta)]. \tag{1.2.15}$$

证明见[1].

§1.3 泊松(Poisson)过程

1.3.1 随机过程定义

定义1.3.1 设(Ω,Γ,P)为一概率空间,T 为一实数集,如果对每个 $t \in T$,都有定义于(Ω,Γ,P)上的随机变量 $X(t,\omega)$ 与之对应,则称依赖 t 的随机变量族 $\{X(t,\omega), t \in T\}$ 为一个随机过程.

其中 T 称为参数集.它可以是离散的,如 $T = \{0,1,2,\cdots,N\}$,或 $T = \{1,2,3,\cdots\}$,或 $T = \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$;也可是连续的,如 $T = \{t: t \geqslant 0\}$,或 $T = [a,b]$,或 $T = (-\infty,+\infty)$.称 T

中的元素 t 为参数. 称 $X(t,\omega)$ 能取的每个值为状态,称所有状态组成的集合 S 为状态空间.

由上定义知,一个随机过程实际上是样本点 ω 与参数 t 的二元函数. 当 $\omega \in \Omega$ 固定时, $X(t,\omega)$ 就是 t 的普通函数. 称它为随机过程的一个样本函数或一个"实现". 对不同的 $\omega \in \Omega$,相应有不同的样本函数. 因此随机过程也叫做随机函数. 当 $t \in T$ 固定时, $X(t,\omega)$ 就是一个随机变量. 当 $\omega \in \Omega$ 与 $t \in T$ 都固定时, $X(t,\omega)$ 就是一个数值,即随机过程的一个状态. 当 T 为连续时,称随机过程为连续参数随机过程. 当 T 为离散时,称随机过程为离散参数随机序列. 简称为随机序列. 如果对每一个固定的 $t \in T$,随机变量 $X(t,\omega)$ 都是离散型的,就说随机过程有一个离散状态空间,否则就说随机过程有一个非离散的状态空间. 由状态空间 S 离散与否,参数集 T 连续与离散可将随机过程分为四类(见表 1.1).

表 1.1

状态空间 / 参数集	离散	非离散
连续	连续参数链	随机过程
离散	离散参数链	随机序列

为了书写方便,常将 $\{X(t,\omega), t \in T\}$ 记成 $\{X(t), t \in T\}$. 有时在不必要标明参数集时,也将 $\{X(t,\omega), t \in T\}$ 记成 $\{X(t)\}$,或 $X(t)$,或 X_t. 参数 t 通常是指时间这一物理量,但是也可以表示别的量, t 也可以是多维的. 参数 t 是多维的随机过程称为随机场.

1.3.2 随机过程的分布及其数字特征

设 $\{X(t), t \in T\}$ 为一随机过程,对每个 $t \in T$,我们定义其一维分布函数为

$$F_t(x) \equiv P\{X(t) < x\}, \quad x \in R.$$

当 t 变动时，就得到一维分布函数族 $\{F_t(x), t \in T\}$. 相应于一维分布函数 $F_t(x)$，我们可以定义 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 与方差函数 $\sigma_X^2(t)$(如果它们都存在的话) 为

$$\mu_X(t) \equiv E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x),$$

$$\sigma_X^2(t) \equiv E[X(t) - \mu_Z(t)]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mu_X(t)]^2 dF_t(x) \quad (1.3.1)$$

对于 $t_1, t_2 \in T$，我们定义随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的二维分布函数为

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) \equiv P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}, x_1, x_2 \in R$$

有了二维分布函数，我们可定义随机过程的二阶矩和协方差函数. 如果对 $s, t \in T, E[|X(s)X(t)|] < \infty$，则记

$$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xydF_{s,t}(x,y) \quad (1.3.2)$$

$$C_X(s,t) = E[X(s) - \mu_X(s)][X(t) - \mu_X(t)] \quad (1.3.3)$$

称 $R_X(s,t), C_X(s,t)$ 分别为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的相关(二阶矩) 函数与协方差函数. 显然 $\sigma_X^2(t) = C_X(t,t), C_X(s,t) = R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

类似地，我们可以引入多维分布函数和数字特征.

1.3.3 泊松过程

定义 1.3.2 设随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的状态只取非负整数值，如果它还满足

(1) $X(0) = 0$，

(2) $\{X(t), t \geq 0\}$ 具有增量独立性，

即对任意 n 个参数 $t_n > t_{n-1} > t_{n-2} > \cdots > t_1 \geq 0$，增量 $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 相互独立；

(3) 对任意 $s, t \geq 0, X(s+t) - X(s) \sim p(\lambda t)$ 即

$$P\{X(s+t) - X(s) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0,1,2,\cdots, \lambda > 0, \quad (1.3.4)$$

则称$\{X(t),t\geqslant 0\}$为泊松过程,称参数λ为平均到达率或强度.

一般$X(t)$表示在时间间隔$[0,t]$中到达某服务台的顾客数.易知

(1) $E[X(t)]=\lambda t=D[X(t)],t\geqslant 0,$ (1.3.5)

(2) $R_X(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st,s,t\geqslant 0,$ (1.3.6)

(3) $C_X(s,t)=\lambda\min(s,t),s,t\geqslant 0.$ (1.3.7)

证 (2) 因$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]$,故当$s<t$时,有

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E\{X(s)[X(t)-X(s)+X(s)]\}\\&=E[X(s)]E[X(t)-X(s)]+E[X^2(s)]\\&=\lambda s\cdot\lambda(t-s)+(\lambda s)^2+\lambda s=\lambda s+\lambda^2 st.\end{aligned}$$

因此,一般地有$R_X(s,t)=\lambda\min(s,t)+\lambda^2 st$.因为$C_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t)$,所以由(2)立证(3).

由(1.3.4)知对任意$t,h\geqslant 0$,$X(t+h)-X(h)$与$X(t)$同分布,即泊松过程的增量具有平稳性,且$X(t+h)\geqslant X(t)$.

因为

$$\begin{aligned}P\{X(t+h)-X(t)\geqslant 0\}&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t+h)-X(t)=k\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!}=1,\end{aligned}$$

由(1.3.4)知,对任意$h\geqslant 0$,

$$P\{X(h)=0\}=e^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(h) \quad (1.3.8)$$

$$P\{X(h)=1\}=\lambda h e^{-\lambda h},$$

故$\lim\limits_{h\to 0+0}\frac{1}{h}P\{X(h)=1\}=\lambda$,从而有

$$P\{X(h)=1\}=\lambda h+o(h). \quad (1.3.9)$$

又因

$$\begin{aligned}P\{X(h)\geqslant 2\}&=1-P\{X(h)=0\}-P\{X(h)=1\}\\&=1-[1-\lambda h+o(h)]-[\lambda h+o(h)],\end{aligned}$$

所以

$$P\{X(h)\geqslant 2\}=o(h) \quad (1.3.10)$$

设 τ_n 为泊松过程中第 n 个顾客到达的时刻.记

$$J_n = \tau_n - \tau_{n-1}, n = 1,2,3,\cdots, \tau_0 = 0. \quad (1.3.11)$$

则称序列 $\{J_n, n \geqslant 1\}$ 为泊松过程的到达间隔时间序列. J_n 表示从第 $n-1$ 个顾客到达时起一直至第 n 个顾客到达时止这段时间.

定理 1.3.1 设泊松过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 具有强度 λ, $\{J_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的到达间隔时间序列. 则 $\{J_n, n \geqslant 1\}$ 是独立同分布随机变量序列,且 $J_1 \sim \Gamma(1,\lambda)$.

证 $\forall t \in R$,当 $t \leqslant 0$ 时,则 $P\{J_1 < t\} = 0$.当 $t > 0$ 时

$$P\{J_1 < t\} = P\{X(t) \geqslant 1\} = 1 - P\{X(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t},$$

所以 J_1 的分布函数为

$$F_{J_1}(t) = P\{J_1 < t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leqslant 0, \end{cases}$$ 即 $J_1 \sim \Gamma(1,\lambda)$.

又当 $t > 0, n > 1$ 时

$$\begin{aligned} & P\{J_n < t \mid J_i = s_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1\} \\ &= P\left\{X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i + t\right) - X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right) \geqslant 1 \mid X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right) = n-1\right\} \\ &= P\left\{X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i + t\right) - X\left(\sum_{i=1}^{n-1} s_i\right) \geqslant 1\right\} = P\{X(t) - X(0) \geqslant 1\} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

当 $t \leqslant 0$ 时,有

$$P\{J_n < t | J_i = s_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1\} = 0.$$

所以 J_n 的条件分布函数为

$$P\{J_n < t \mid J_i = s_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1\} = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

此示 J_n 与 $J_1, J_2, J_3, \cdots, J_{n-1}$ 相互独立, $n = 1,3,\cdots$.且 $J_n \sim \Gamma(1, \lambda)$,从而结论成立.

推论 1.3.1 $\tau_n \sim \Gamma(n,\lambda)$.

引理 1.3.1 设 $X(t)$ 表示时间间隔$[0,t]$中到达某服务台

的顾客数，$\{J_n, n \geq 1\}$为顾客到达的间隔时间序列，且为独立同服从均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布随机变量序列．则对任意 n 个时间$t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 > 0$与 n 个整数$k_n \geq k_{n-1} \geq \cdots \geq k_1 \geq 0$，有

$$P\{X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \cdots, X(t_n) = k_n\}$$

$$= \prod_{i=2}^{n} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \cdot \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{k_i - k_{i-1}}}{(k_i - k_{i-1})!} \cdot e^{-\lambda t_1} \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}.$$

证明见[2]．

定理 1.3.2 设$\{J_n, n \geq 1\}$，$\{X(t), t \geq 0\}$为由引理 1.3.1 给出的间隔时间序列和随机过程．则$\{X(t), t \geq 0\}$为具有参数 λ 的泊松过程．

证 由引理 1.3.1 知，对任意 $t \geq 0$，有

$$p\{X(t) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

所以

$$P\{X(0)=0\} = 1 - P\{X(0) > 0\} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}]|_{t=0}$$

$$= 1 - 0 = 1,$$

即 $X(0) = 0$．

对任意 $s, t \geq 0$ 与非负整数 n，由引理 1.3.1，有

$$P\{X(s+t) - X(s) = n\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(s+t) - X(s) = n, X(s) = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(s+t) = n+k, X(s) = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

即

$$P\{X(s+t) - X(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1,2,\cdots.$$

对任意 n 个参数$t_n > t_{n-1} > \cdots > t_1 > t_0 = 0$以及非负整数$k_n$，$k_{n-1}, \cdots, k_1$有

$$P\{X(t_1)-X(t_0)=k_1,X(t_2)-X(t_1)=k_2,\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})=k_n\}$$

$$=P\left\{X(t_1)=k_1,X(t_2)=k_1+k_2,\cdots,X(t_n)=\sum_{i=1}^{n}k_i\right\}$$

$$=\prod_{i=2}^{n}e^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}\frac{[\lambda(t_i-t_{i-1})]^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)k_1}{k_1!}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{X(t_i)-X(t_{i-1})=k_i\},$$

即$\{X(t),t\geqslant 0\}$的增量具有独立性.从而本定理得证.

设$\{X(t),t\geqslant 0\}$为参数是λ的泊松过程，在实际问题中$X(t)$可表为在$[0,t]$中更新某零件的个数，则J_i表示第i个零件的寿命，λ为单位时间内更新该种零件的平均数.对任意时间$t>0$且$t\neq\tau_n,n=0,1,2,\cdots$，令

$$\alpha_t=t-\tau_{X(t)},\beta_t=\tau_{X(t)+1}-t.$$

图 1-2

则称α_t为时刻t时零件的年龄，称β_t为时刻t时零件的剩余寿命.

定理 1.3.3 (1)β_t的分布与t无关且$\beta_t\sim\Gamma(1,\lambda)$,

(2)α_t的分布函数为$F_{\alpha_t}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & 0<x\leqslant t,\\ 1, & x>t.\end{cases}$

证 当$x>0$时，因为

$$\begin{aligned}P\{\beta_t<x\}&=P\{X(t+x)-X(t)>0\}\\&=1-P\{X(t+x)-X(t)=0\}\\&=1-e^{-\lambda x},\end{aligned}$$

当$x\leqslant 0$时，显然有$P\{\beta_t<x\}=0$.从而(1)得证.

(2)因为

$$P\{\alpha_t=t\}=P\{J_{X(t)+1}>t\}=P\{J_1>t\}=e^{-\lambda t},$$

当 $0<x\leqslant t$ 时，有

$P\{\alpha_t<x\}=P\{X(t)-X(t-x)>0\}=1-P\{X(t)-X(t-x)=0\}=1-e^{-\lambda x}$.

当 $x\leqslant 0$ 时，显然有 $P\{\alpha_t<x\}=0$. 当 $x>t$ 时，显然有 $P\{\alpha_t<x\}=1$. 从而(2)得证.

由上定理知 $F_{\alpha_t}(x)$ 在 $x=t$ 处有第一类间断点，在其它地方均连续，所以 α_t 既不是连续型随机变量，也不是离散型随机变量.

但是 $\lim\limits_{t\to\infty}F_{\alpha_t}(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0\\ 1-e^{-\lambda x}, x>0\end{cases}$ 为指数分布函数.

§1.4 伯努利(Bernoulli)过程

定义 1.4.1 称随机序列 $\{N(n), n\geqslant 0\}$ 为参数是 $\lambda(0<\lambda<1)$ 的伯努利过程. 如果它满足下列三个条件：

(1) $N(0)=0$,

(2) $\{N(n), n\geqslant 0\}$ 具有独立增量性，

(3) $N(n+m)-N(m)\sim B(n,\lambda)$，其中 m, n 均为非负整数，即，

$P\{N(n+m)-N(m)=k\}=C_n^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n, \bar{\lambda}=1-\lambda$.

由此定义知，对任意非负整数 n，有

$$E[N(n)]=n\lambda, D[N(n)]=n\lambda\bar{\lambda},$$

其中 $\bar{\lambda}=1-\lambda$. 且 $\{N(n), n\geqslant 0\}$ 的增量具有平稳性.

定理 1.4.1 设 $\{J_i, i\geqslant 1\}$ 为参数是 λ 的伯努利过程 $\{N(n), n\geqslant 0\}$ 的间隔时间序列，则 $\{J_i, i\geqslant 1\}$ 是 i,i,d 随机序列，且 $P\{J_1=k\}=\lambda\bar{\lambda}^{k-1}$, $k=1,2,3,\cdots$，即 $J_i\sim \mathrm{Geo}(\lambda)$.

证 定义 1.4.1 知，对任意正整数 k，有

$$\begin{aligned}P\{J_1=k\}&=P\{N(k-1)=0, N(k)=1\}\\&=P\{N(k)-N(k-1)=1, N(k-1)=0\}\\&=P\{N(k)-N(k-1)=1\}P\{N(k-1)=0\}\\&=C_1^1\lambda^1\bar{\lambda}^{1-1}\cdot C_{k-1}^0\lambda^0\bar{\lambda}^{k-1}=\lambda\bar{\lambda}^{k-1}, k=1,2,3,\cdots,\end{aligned}$$

又当 $n>1$ 时,对任意正整数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},k$,有

$$P\{J_n = k \mid J_i = k_j, J \leqslant i \leqslant n-1\}$$

$$= P\Big\{N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i + k) - N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i + k - 1) = 1,$$

$$N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i + k - 1) - N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i) = 0\Big\}$$

$$= P\Big\{N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i + k) - N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i + k - k) = 1\Big\}$$

$$\cdot P\Big\{N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i + k - 1) - N(\sum_{i=1}^{n-1}k_i) = 0\Big\}$$

$$= \lambda\bar{\lambda}^{k-1},\ k = 1,2,3,\cdots.$$

此示 J_n 与 $J_1,J_2,\cdots,J_{n-1}$ 相互独立,且 $J_n \sim \mathrm{Geo}(\lambda)$,从而定理得证.

引理 1.4.1 设 $\{J_i, i\geqslant 1\}$ 为输入过程 $\{N(n), n\geqslant 0\}$ 的到达间隔时间序列,且 $\{J_i, i\geqslant 1\}$ 独立同分布,$J_i \sim \mathrm{Geo}(\lambda)$ 则对整数:$n_{i+1} > n_i \geqslant 0$ 与

$$n_{i+1} \geqslant k_{i+1} \geqslant k_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,m-1,$$

有

$$P\{N(n_1) = k_1, N(n_2) = k_2, \cdots, N(n_m) = k_m\}$$

$$= C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1}\prod_{i=2}^{m}C_{n_i-n_{i-1}}^{k_i-k_{i-1}}\lambda^{k_i-k_{i-1}}\bar{\lambda}^{n_i-n_{i-1}-(k_i-k_{i-1})}.$$

证 当 $m=1$ 时,因为 $\{N(n_1)\geqslant k_1\} = \{\tau_{k_1}\leqslant n_1\}$,其中 $\tau_{k_1} = \sum_{i=1}^{k_1}J_i$ 为第 k_1 个顾客到达的时刻,所以

$$\begin{aligned}P\{N(n_1) = k_1\} &= P\{N(n_1)\geqslant k_1\} - P\{N(n_1)\geqslant k_1+1\}\\ &= P\{\tau_{k_1}\leqslant n\} - P\{\tau_{k_1+1}\leqslant n_1\}\\ &= \sum_{j=k_1}^{n_1}C_{j-1}^{k_1-1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{j-k_1} - \sum_{j=k_1+1}^{n_1}C_{j-1}^{k_1}\lambda^{k_1+1}\bar{\lambda}^{j-k_1-1},\\ &= C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1},\ k_1 = 0,1,2,\cdots,n_1\end{aligned}$$

假设 $m=t-1$ 时，结论成立. 由全概率公式，得

$$P\{N(n_1)=k_1,N(n_2)=k_2,\cdots,N(n_t)=k_t\}$$

$$=P\{\tau_{k_1}\leqslant n_1,\tau_{k_1+1}>n_1,\tau_{k_2}\leqslant n_2,\tau_{k_2+1}>n_2,\cdots,\tau_{k_t}\leqslant n_t,\tau_{k_t+1}>n_t\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}P\{J_{k_1+1}>n_i-i,J_{k_1+1}+\cdots+J_{k_2}\leqslant n_2-i,J_{k_1+1}+\cdots$$

$$+J_{k_2+1}\geqslant n_2-i,\cdots,J_{k_1+1}+\cdots+J_{k_t}\leqslant n_t-i,J_{k_1+1}+\cdots+J_{k_t+1}>n_t$$

$$-i\}P\{\tau_{k_1}=i\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}P\{J_{k_1+2}+\cdots+J_{k_2}$$

$$\leqslant n_2-i-j,J_{k_1+2}+\cdots+J_{k_2+1}>n_2-i-j,\cdots,J_{k_1+2}+\cdots+J_{k_t}\leqslant n_t-i-j,$$

$$J_{k_1+2}+\cdots+J_{k_t+1}>n_t-i-j\}\cdot P\{\tau_{k_1}=i\}P\{J_{k_1+1}=j\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}P\{\tau_{k_2-k_1-1}\leqslant n_2-i-j,\tau_{k_2-k_1}>n_2-i-j,\cdots,$$

$$\tau_{k_t-k_i-1}\leqslant n_t-i-j,\tau_{k_t-k_1}>n_t-i-j\}P\{\tau_{k_1}=i\}$$

$$\cdot P\{J_{k_1+1}=j\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}P\{N(n_2-i-j)$$

$$=k_2-k_1-1,\cdots,N(n_t-i-j)=k_t-k_1-1\}\cdot P\{\tau_{k_1}=i\}$$

$$\cdot P\{j_{k_1+1}=j\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}C_{n_2-i-j}^{k_2-k_1-1}\lambda^{k_2-k_1-1}\bar{\lambda}^{n_2-i-j-k_2+k_1+1}\cdot\prod_{r=3}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}$$

$$\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}C_{i-1}^{k_1-1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{i-k_1}\lambda^{k_2}\bar{\lambda}^{n_2-k_2}=\prod_{r=3}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}$$

$$\cdot\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=n_1-i+1}^{n_2-i}C_{n_2-i-j}^{k_2-k_1-1}C_{i-1}^{k_1-1}\lambda^{k_2}\bar{\lambda}^{n_2-k_2}$$

$$=\prod_{r=3}^{t}C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}C_{n_1}^{k_1}C_{n_2-n_1}^{k_2-k_1}\lambda^{k_2}\bar{\lambda}^{n_2-k_2}$$

$$= C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1}\prod_{r=2}^{t} C_{n_r-n_{r-1}}^{k_r-k_{r-1}}\lambda^{k_r-k_{r-1}}\bar{\lambda}^{n_r-n_{r-1}-(k_r-k_{r-1})}.$$

此示 $m = t$ 时结论也成立.由数学归纳法,引理 1.4.1 得证.

定理 1.4.2 设 $\{J_i, i \geqslant 1\}$ 为输入随机序列 $\{N(n), n \geqslant 0\}$ 的到达间隔时间序列,且 $\{J_i, i \geqslant 1\}$ 为独立同分布序列,$J_1 \sim \mathrm{Geo}(\lambda)$.则 $\{N(n), n \geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的伯努利过程.

证 因为对任意非负整数 n 和 $k(k \leqslant n)$ 有

$$P\{N(n) = k\} = C_n^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n-k},\ k = 0,1,2,\cdots,n,$$

所以 $P\{N(0)>0\} = \sum_{k=1}^{0} P\{N(0)=k\} = 0$. 从而 $P\{N(0)=0\} = 1$,即 $N(0)=0$. 又因对任意整数 $m, n \geqslant 0$ 与 $k(n \geqslant k \geqslant 0)$,由引理1.4.1,得

$$P\{N(m+n)-N(m)=k\} = \sum_{i=0}^{m} P\{N(m+n) = k+i, N(m) = i\}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} C_m^i\lambda^i\bar{\lambda}^{m-i}C_n^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n-k} = C_n^k\lambda^k\bar{\lambda}^{n-k},\ k = 0,1,\cdots,n,$$

故对任意 m 个整数:$n_m > n_{m-1} > \cdots > n_1 > n_0 = 0$ 和满足:$\sum_{i=1}^{l} k_i \leqslant n_l (l = 1,2,\cdots,m)$ 的非负整数 $k_1, k_2, \cdots, k_m$,由引理 1.4.1,得

$$P\{N(n_1)-N(n_0)=k_1, N(n_2)-N(n_1) = k_2, \cdots, N(n_m)-N(n_{m-1})=k_m\}$$

$$= P\left\{N(n_1) = k_1, N(n_2) = k_1 + k_2, \cdots, N(n_m) = \sum_{i=1}^{m} k_1\right\}$$

$$= C_{n_1}^{k_1}\lambda^{k_1}\bar{\lambda}^{n_1-k_1}\prod_{i=2}^{m} C_{n_i-n_{i-1}}^{k_i}\lambda^{k_i}\bar{\lambda}^{n_i-n_{i-1}-k_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} P\{N(n_i) - N(n_{i-1}) = k_i\}.$$

此示,$\{N(n), n \geqslant 0\}$ 具有增量独立性,由定义 1.4.1 本定理得证.

§1.5 马尔可夫过程

1.5.1 马氏(Markov)过程的定义

马尔可夫过程是一类很重要的随机过程.这一类过程的特点

是：当过程在时刻 t_0 所处状态已知时，t_0 以后过程所处的状态与 t_0 以前过程所处状态无关. 这个特性叫做无后效应，也叫马尔可夫性. 通俗地说，就是"已知现在，将来和过去无关".

定义 1.5.1 设 $\{X(t),t\in T\}$ 为一随机过程. $t_i\in T,i=1,2,\cdots,n$，且 $t_1<t_2<\cdots<t_n$. 如果对状态空间 S 中的任意状态 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$，$X(t_n)$ 的条件分布函数满足：

$$P\{X(t_n)<x|X(t_{n-1})=x_{n-1},X(t_{n-2})=x_{n-2},\cdots,X(t_1)=x_1\}$$
$$=P\{X(t_n)<x|X(t_{n-1})=x_{n-1}\},\ x\in R, \tag{1.5.1}$$

则称 $\{X(t),t\in T\}$，具有无后效应性或马氏性，并称 $\{X(t),t\in T\}$ 为马尔可夫过程，简称为马氏过程.

一般记 $P\{X(t_n)<x|X(t_{n-1})=x_{n-1}\}$ 为 $F(t_{n-1},x_{n-1};t_n,x)$，即

$$F(t_{n-1},x_{n-1};t_n,x)=P\{X(t_n)<x|X(t_{n-1})=x_{n-1}\}, \tag{1.5.2}$$

称它为马氏过程的转移概率分布. 它满足切普曼-柯尔莫哥洛夫(Chapman-Kolmogorov)方程：

$$F(s,x;t,y)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u,z;t,y)d_zF(s,x;u,z),$$
$$s<u<t<T, \tag{1.5.3}$$

其中 $d_zF(s,x;u,z)$ 表示对 $F(s,x;u,z)$ 关于变量 z 微分.

证 由全概率公式得

$$F(s,x;t,y)=P\{X(t)<y\mid X(s)=x\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}P\{X(t)<y\mid X(u)=z,X(s)=x\}d_zP\{X(u)<z\mid X(s)=x\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}P\{X(t)<y\mid X(u)=z\}d_zP\{X(u)<z\mid X(s)=x\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}F(u,z;t,y)d_zF(s,x;u,z).$$

定义 1.5.2 设随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的状态空间 S 为 R 中的可列集. 如果对 T 中任意 n 个 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 以及使

$$P\{X(t_1)=i_1,X(t_2)=i_2,\cdots,X(t_{n-1})=i_n-1\}>0$$

的状态 $i_k\in s,k=1,2,\cdots,n-1$，与状态 $i_n\in s$ 均有

$$P\{X(t_n)=i_n\mid X(t_{n-1})=i_{n-1},X(t_{n-2})=i_{n-2},\cdots,X(t_1)=i_1\}$$

$$= P\{X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}\}, \tag{1.5.4}$$

则称$\{X(t), t \in T\}$为马尔可夫链，简称为马氏链. 如果 T 还是可列离散集，则称$\{X(t), t \in T\}$为离散参数马氏链. 如果 T 是连续参数集，则称$\{X(t), t \in T\}$为连续参数马氏链.

1.5.2 连续参数马氏链

对连续参数马氏链. 一般设其状态空间为 $I = \{0,1,2,\cdots\}$ 或 $I_N = \{0,1,2,\cdots,N\}$. 设参数集 $T = [0, +\infty)$. 因此，$\{X(t), t \in T\}$ 可以写成 $\{X(t), t \geqslant 0\}$，并记 $P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$ 为 $p_{ij}(s,t)$，即

$$p_{ij}(s,t) = p\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}, i,j \in I, s,t \geqslant 0, \tag{1.5.5}$$

如转移概率(条件概率)$p_{ij}(s,t)$ 只与 t 有关，而与 s 无关，则称$\{X(t), t \geqslant 0\}$为连续参数齐次马尔可夫链，并记 $p_{ij}(s,t)$ 为 $p_{ij}(t)$，即

$$p_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\},$$
$$i,j \in I,\ t \geqslant 0. \tag{1.5.6}$$

显然，有

$$p_{ij}(t) \geqslant 0, \quad i,j \in I, \quad t \geqslant 0,$$
$$\sum_{j \in I} p_{ij}(t) = 1. \tag{1.5.7}$$

我们规定

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases} \tag{1.5.8}$$

今后如不特别说明本章涉及的马氏链均指连续参数齐次马氏链.

(1.5.6) 式可写成矩阵形式：

$$P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j \in I}, \quad t \geqslant 0, \tag{1.5.9}$$

设 $s,t \geqslant 0, i,j \in I$，则由全概率公式得

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= P\{X(s+t) = j \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{k \in I} P\{X(s+t) = j, X(s) = k \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{k \in I} P\{X(s+t) = j \mid X(s) = k\} P\{X(s) = k \mid X(0) = i\} \\ &= \sum_{k \in I} p_{ik}(s) p_{kj}(t), \end{aligned}$$

即

$$p_{ij}(s+t)=\sum_{k\in I}p_{ik}(s)p_{kj}(t),\ i,j\in I,\ s,t\geqslant 0,\tag{1.5.10}$$

称上式为连续参数齐次马氏链的 C-K(Chapman-Kolmogorov) 方程.也可把它写成如下的矩阵形式:

$$P(s+t)=P(s)P(t),s,t\geqslant 0.\tag{1.5.11}$$

定理 1.5.1 由(1.5.6)式给出的 $p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数($t\geqslant 0$).

证 对任意 $h>0$,有

$$\begin{aligned}p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)&=\sum_{k\in I}p_{ik}(h)p_{kj}(t)-p_{ij}(t)\\&=p_{ii}(h)p_{ij}(t)-p_{ij}(t)+\sum_{k\in I,k\neq j}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\\&=-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)+\sum_{k\in I,k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\\&\geqslant-[1-p_{ii}(h)]p_{ij}(t)\geqslant-[1-p_{ii}(h)].\end{aligned}\tag{1.5.12}$$

由(1.5.12)式又有

$$p_{ij}(h+t)-p_{ij}(t)\leqslant\sum_{k\in I,k\neq i}p_{ik}(h)p_{kj}(t)\leqslant\sum_{k\in I,k\neq i}p_{ik}(h)=1-p_{ii}(h).$$

所以

$$|p_{ij}(h+t)-p_{ij}(t)|\leqslant 1-p_{ii}(h)\to 0,(\text{当 } h\to 0+0 \text{ 时}).$$

对 $h<0(h+t\geqslant 0)$ 同理可证上式成立.从而 $p_{ij}(t)$ 是 t 的一致连续函数.

定理 1.5.2 (1) $\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{1}{t}[1-p_{ii}(t)]=q_i,i\in I$,

(2) $\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{P_{ij}(t)}{t}=q_{ij},i,j\in I,j\neq i$,

其中 $q_{ij}=p_{ij}q_i,p_{ij}=P\{X(T_i)=j\mid X(0)=i\},T_i$ 为链在状态 i 停留的时间(然后链进入状态 j),

$$q_i=\frac{1}{E(T_i)}.$$

证 由[3]的引理5.1.1与引理5.1.2可证.由定理1.5.2知

$$q_{ij} = p_{ij}q_j \leqslant q_i, \sum_{j\in I, j\neq i} q_{ij} = \sum_{j\in I, j\neq i} p_{ij}q_i \leqslant q_i.$$

当 $j \neq i$ 时,由(1.5.8)

$$0 \leqslant q_{ij} = \lim_{t\to 0+0} \frac{p_{ij}(t)}{t} = \lim_{t\to 0+0} \frac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t-0} = p'_{ij}(0),$$

且

$$0 \leqslant q_i = \lim_{t\to 0+0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t-0} = -\lim_{t\to 0+0} \frac{p_{ii}(t) - p_{ii}(0)}{t-0} = -p'_{ii}(0),$$

即

$$\begin{cases} p'_{ii}(0) = -q_i, & i \in I \\ p'_{ij}(0) = q_{ij}, & i,j \in I,\ j \neq i \end{cases} \tag{1.5.13}$$

记 $q_{ii} = -q_i$.则称矩阵

$$Q \equiv [q_{ij}]_{i,j\in I} = [p'_{ij}(0)]_{i,j\in I} \tag{1.5.14}$$

为转移概率矩阵 $p(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j\in I}$ 的密度矩阵或称为Q矩阵.由(1.5.14)式知,q_{ij} 是 $p_{ij}(t)$ 在0点的右导数.

定理1.5.3 对任意状态 $j \in I$,如果 $q_j < \infty$,$q_j = \sum_{k\in I, k\neq j} q_{jk}$ 且 $\lim_{t\to 0+0} \frac{1}{t}p_{ij}(t) = q_{ij}$,$i \neq j$ 关于 $i \in I$ 一致成立,则

$$P'_j(t) = -q_jp_j(t) + \sum_{k\in I, k\neq j} p_k(t)q_{kj}, j\in I, \tag{1.5.15}$$

其中 $p_j(t) = P\{X(t) = j\}$,$t \geqslant 0$.称(1.5.15)为柯氏前进方程.

证 这里仅给出 I 为有限时的证明.因为

$$\begin{aligned} p_j(t+\Delta t) &= P\{X(t+\Delta t) = j\} \\ &= \sum_{k\in I} P\{X(t+\Delta t) = j \mid X(t) = k\} P\{X(t) = k\} \\ &= \sum_{k\in I} p_{kj}(\Delta t) p_k(t), \end{aligned}$$

所以

$$\frac{p_j(t+\Delta t) - p_j(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left[\sum_{k\in I} p_k(t) p_{kj}(\Delta t) - p_j(t)\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\left[p_j(t) p_{jj}(\Delta t) - p_j(t) + \sum_{k\in I, k\neq j} p_k(t) p_{kj}(\Delta t)\right]$$

$$= \frac{p_{jj}(\Delta t)-1}{\Delta t}p_j(t)+\sum_{k\in I,k\neq j}p_k(t)\cdot\frac{p_{kj}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

令 $\Delta t\to 0+0$，由定理 1.5.2 和定理假设得

$$p'_j(t)=-q_jp_j(t)+\sum_{k\in I,k\neq j}p_k(t)q_{kj}.$$

定理 1.5.4 如果存在 $t_0>0$ 使得对任意 $i,r\in I$，有 $p_{ir}(t_0)>0$，则对任意 $i,j\in I$，有

$$\lim_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\pi_j$$

与 i 无关. 证明见[3] 中定理 5.1.4.

定理 1.5.5 如存在 $t_0>0$ 使得对任意 $i,r\in I$ 有 $p_{ir}(t_0)>0$，则

(1) $\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)=\pi_j,\ j\in I$,

(2) $\lim\limits_{t\to\infty}p'_j(t)=0,\ j\in I$.

证 (1) 这里仅就 I 为有限集证明.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}P_j(t)&=\lim_{t\to\infty}P\{X(t)=j\}\\&=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in I}P\{X(t)=j\mid X(0)=i\}P\{X(0)=i\}\\&=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in I}P_{ij}(t)P\{X(0)=i\}\\&=\sum_{i\in I}\pi_jP\{X(0)=i\}=\pi_j\end{aligned}$$

证 (2) 如果存在 $j\in I$ 使得 $\lim\limits_{t\to\infty}p'_j(t)=c_j\neq 0$，则当 $c_j>0$ 时，取 a_j 使得 $c_j>a_j>0$. 于是存在 $t_0\geqslant 0$，使得当 $t\geqslant t_0$ 时 $p'_j(t)\geqslant a_j$. 所以

$$\lim_{t\to\infty}p_j(t)=\lim_{t\to\infty}[p_j(t_0)+\int_0^t p_j(\tau)d\tau]\geqslant p_j(t_0)+a_j\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t d\tau=\infty,$$

此与 $p_j(t)\leqslant 1$ 矛盾. 当 $c_j<0$ 时类似可推出矛盾，从而(2)得证.

由定理 1.5.3 与定理 1.5.5 得

$$\sum_{k\in I}\pi_kq_{kj}=0,\ j\in I,\ \text{即}\ \pi Q=0, \qquad (1.5.16)$$

其中 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)$. 如果 $\sum\limits_{k\in I}\pi_k=1$，则称 $\{\pi_k,k\in I\}$ 为马

氏链的平稳分布. 即由方程 $\pi Q=0$ 与 $\sum_{k\in I}\pi_k=1$ 可解得极限分布

$$\pi_k=\lim_{t\to\infty}p_k(t),k\in I. \tag{1.5.17}$$

定义 1.5.3(生灭过程) 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为具有状态空间 I (或 I_N)的连续参数齐次马氏链. 如果其转移概率 $p_{ij}(t)$ 满足: 对任意 $i,j\in I$,

$$\begin{cases}p_{i,i+1}(t)=\lambda_i t+0(t),\lambda_i>0,\\ p_{i,i-1}(t)=\mu_i t+0(t),\mu_0=0,\text{当 } i\geqslant 1 \text{ 时 } \mu_i>0,\\ p_{ii}(t)=1-(\lambda_i+\mu_i)t+0(t),\\ p_{ij}(t)=0(t),|j-i|\geqslant 2,\end{cases} \tag{1.5.18}$$

则称 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为生灭过程. 生灭过程的状态是相通的. 易见有 $q_i=\lambda_i+\mu_i, q_{i,i+1}=\lambda_i, q_{i,i-1}=\mu_i, q_{ij}=0, |j-i|\geqslant 2$. 生灭过程的密度($Q$)矩阵为

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ u_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & u_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}. \tag{1.5.19}$$

如果连续参数齐次马氏链的密度矩阵 $Q=[q_{ij}]$ 满足: 对一切 $i\in S$ 有

$$\sum_{j\in s,j\neq i}q_{ij}=q_i<\infty, \tag{1.5.20}$$

则称 Q 或连续参数齐次马氏链是保守的. 并称矩阵

$$R=[r_{ij}],\text{其中 } r_{ij}=\begin{cases}(1-\delta_{ij})\dfrac{q_{ij}}{q_i}, & q_i>0,\\ \delta_{ij}, & q_i=0\end{cases} \tag{1.5.21}$$

为相应于 Q 的跳跃矩阵. 称以 R 为转移概率矩阵的离散参数马氏链为原连续参数马氏链的跳跃链.

由定义 1.5.3 知, 生灭过程(的 Q 矩阵)是保守的, 其跳跃矩

阵为

$$R=\begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \bar{p}_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \bar{p}_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \bar{p}_3 & 0 & p_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad (1.5.22)$$

其中 $p_i=\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i}$, $\bar{p}_i=1-p_i$, $i\geqslant 1$. 当 $\lambda_0=0$ 时, $r_0=1$, $p_0=0$, 当 $\lambda_0>0$ 时, $r_0=0$, $p_0=1$.

如果生灭过程满足条件 $\mu_i\equiv 0$,则称它为纯生过程. 如果生灭过程满足条件 $\lambda_i\equiv 0$,则称它为纯灭过程. 生灭过程的前进柯氏方程为

$$\begin{cases} p'_j(t)=-(\lambda_i+\mu_j)p_j(t)+\lambda_{j-1}p_{j-1}(t)+\mu_{j+1}p_{j+1}(t), j\geqslant 1, \\ p'_0(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t). \end{cases}$$

$$(1.5.23)$$

如果在时刻 0 过程处于状态 $i\in I$,则上方程的初始条件为 $p_i(0)=1$, $p_k(0)=0$, $k\neq i$. 如果生灭过程的平稳分布 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 存在,由(1.5.16),它应满足方程组:

$$\begin{cases} -(\lambda_j+\mu_j)\pi_j+\lambda_{j-1}\pi_{j-1}+\mu_{j+1}\pi_{j+1}=0, \ j=1,2,3,\cdots, \\ -\lambda_0\pi_0+\mu_1\pi_1=0, \\ \sum\limits_{k\in I}\pi_k=1, \end{cases} \qquad (1.5.24)$$

由第一式得

$$\mu_{j+1}\pi_{j+1}-\lambda_j\pi_j=\mu_j\pi_j-\lambda_{j-1}\pi_{j-1}=\cdots=\mu_1\pi_1-\lambda_0\pi_0.$$

由第二式得 $\pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$,从而得

$$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0. \qquad (1.5.25)$$

由(1.5.24)中的第三式得

$$\pi_0=(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k})^{-1}, \qquad (1.5.26)$$

从而知级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$.反之如果$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$，则生灭过程的平稳分布存在，且由(1.5.25)与(1.5.26)式确定.

§1.6 更新过程

1.6.1 定义与有关概念

设$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots$为相互独立非负的随机变量，且$\xi_2,\xi_3,\xi_4,\cdots$同分布，ξ_1的分布函数记为$F_1(t)$，ξ_2的分布函数记为$F(t)$，令

$$s_0=0,s_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\quad n=1,2,3,\cdots. \qquad (1.6.1)$$

定义 1.6.1 记$N(t)=\max\{n:s_n<t\}$，$N(0)=0$，$t\geqslant 0$，则称$\{N(t),t\geqslant 0\}$为一般更新过程；如果$F_1(t)\equiv F(t)$，则称$\{N(t),t\geqslant 0\}$为更新过程，称$F(t)$为更新分布，称$F_1(t)$为首次更新分布.

由此定义，显然有

$$\begin{cases}\{N(t)=0\}=\{S_1\geqslant t\},\\ \{N(t)=n\}=\{S_n<t,\ S_{n+1}\geqslant t\},\\ \{N(t)<n\}=\{S_n\geqslant t\}.\end{cases} \qquad (1.6.2)$$

在实际中，$N(t)$一般表示在时间区间$[0,t]$中更新某设备中相同元件的次数，ξ_n为第n个元件的寿命，S_n为第n个元件更新的时刻.如果在$t=0$时安装了一个新的元件，则$\{N(t),t\geqslant 0\}$就是更新过程，如果在$t=0$时，已有一个元件在运行(工作)，则$\{N(t),t\geqslant 0\}$就是一般更新过程.记

$$m(t)=E[N(t)],\quad t\geqslant 0. \qquad (1.6.3)$$

则称$m(t)$为更新函数.

由(1.6.2)得

$$\{N(t)\geqslant n\}=\{S_n<t\}.$$

从而

$$m(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n < t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t), \qquad (1.6.4)$$

其中 $F^{n*}(t)$为 $F(t)$的 $n(n\geqslant 1)$重卷积,$F^{0*}(t) = U(t) = \begin{cases} 0, & t\leqslant 0, \\ 1, & t>0, \end{cases}$

$$F^{n*}(t) = \int_0^t F^{(n-1)*}(t-x)dF(x), n \geqslant 1, \qquad (1.6.5)$$

因为

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t) \\ &= F_1(t) * [F^{0*}(t) + F(t) + F(t) * F(t) \\ &\quad + F^{3*}(t) + F^{4*}(t) + \cdots] \\ &= F_1(t) * U(t) + F_1(t) * F(t) * [F^{0*}(t) + F(t) \\ &\quad + F^{2*}(t) + F^{3*}(t) + \cdots] \\ &= F_1(t) + F(t) * \sum_{n=0}^{\infty} F_1(t) * F^{n*}(t) = F_1(t) + F(t) * m(t), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} m(t) &= F_1(t) + \int_0^t F(t-x)dm(t) \\ &= F_1(t) + \int_0^t m(t-x)dF(x), \qquad (1.6.6) \end{aligned}$$

称更新函数 $m(t)$ 满足的此方程为更新方程,它的解在有限区间上是有界惟一的,并由(1.6.4) 给出.

记 $F_1(t)$,$F(t)$的 LST 分别为 $f_1(s)$与 $f(s)$,$m(t)$的 LST 为 $u(s)$,即

$$u(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dm(t), f_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dF_1(t),$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}dF(t), R_e(s) > 0,$$

则由(1.6.6)得

$$u(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF_1(t)+\int_0^\infty e^{-st}dF(t)*m(t)$$
$$=f_1(s)+f(s)u(s),$$

(因为卷积的 LST 为 LST 的乘积),即

$$u(s)=\frac{f_1(s)}{1-f(s)},R_e(s)>0. \qquad (1.6.7)$$

称一般更新过程$\{N(t),t\geqslant 0\}$是平稳的,如果

$$b\equiv\int_0^\infty tdF(t)<\infty,F_1(t)=\frac{1}{b}\int_0^t[1-F(x)]dx,\quad t\geqslant 0.$$

这是因为

$$f_1(s)=\int_0^\infty e^{-st}dF_1(t)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{1-F(t)}{b}dt=\frac{1-f(s)}{bs},$$

所以,由(1.6.7)得

$$u(s)=\frac{1}{bs}. \qquad (1.6.8)$$

从而

$$m(t)=\frac{t}{b}.$$

1.6.2 更新定理

当$t\to\infty$时,$m(t)$的性态是更新理论关心的中心问题,其性态由下面的更新定理给出.下面这些更新定理是关于更新过程给出的,但是它们对一般更新过程也成立.

定理 1.6.1

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\begin{cases}\frac{1}{b}, & b<\infty,\\ 0, & b=\infty,\end{cases}$$

其中 $b=\int_0^\infty tdF(t)$.

证 因为 $S_{N(t)}<t\leqslant S_{N(t)+1}$,所以

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} < \frac{t}{N(t)} \leqslant \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)},$$

记 $N(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} N(t)$. 又因

$$P\{N(\infty) < \infty\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(\infty) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_n < \infty, S_{n+1} \geqslant \infty\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi_{n+1} = \infty\} = 0, \qquad (\text{因 } P\{\xi_{n+1} < \infty\} = F(\infty) = 1)$$

从而 $P\{N(\infty) = \infty\} = 1$. 由强大数定律有

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{N(t)} \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i = E(\xi_2) = b, \text{ a.s.}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} = b, \text{ a.s.}$$

所以 $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t}{N(t)} = b$, 从而 $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{N(t)}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & b < \infty, \\ 0, & b = \infty. \end{cases}$

定理 1.6.2(基本更新定理)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & b < \infty, \\ 0, & b = \infty. \end{cases} \tag{1.6.9}$$

证 当 $b < \infty$ 时, 因为 $S_{N(t)+1} = t + \xi_+$, 其中 ξ_+ 为一个元件的剩余寿命(见图 1-3). 故 $E[S_{N(t)+1}] = t + E[\xi_+]$.

图 1-3

又因 $E[S_{N(t)+1}] = E[\sum\limits_{i=1}^{N(t)+1} \xi_i] = E[N(t)+1]E(\xi_1) = bE[N(t)+1] = b[m(t)+1]$, 从而

$$\frac{m(t)}{t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{b} + \frac{E(\xi_+)}{bt} \geqslant \frac{1}{b} \qquad (\text{因 } E(\xi_+) \geqslant 0) \tag{1.6.10}$$

故

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \geqslant \frac{1}{b}. \tag{1.6.11}$$

令 $\begin{cases} \overline{\xi_n} = \begin{cases} \xi_n, & \xi_n \leqslant A \\ 0, & \xi_n > A \end{cases} \\ \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi_i}, n \geqslant 1, A \text{ 为任意正数} \\ \overline{N}(t) = \max\{n: \overline{S_n} < t\}, \ \overline{m(t)} = E[\overline{N}(t)], \ t \geqslant 0. \end{cases}$

$\overline{\xi_+}$为$\{\overline{N}(t), t \geqslant 0\}$中元件的剩余寿命.易见$\overline{\xi_+} < A$.由(1.6.10)得

$$\frac{\overline{m(t)}}{t} + \frac{1}{t} \leqslant \frac{A}{b_A t} + \frac{1}{b_A},$$

其中 $b_A = E(\overline{\xi_n}) \leqslant b < \infty$.因此

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\overline{m(t)}}{t} \leqslant \frac{1}{b_A}. \tag{1.6.12}$$

但是,由于$\overline{S_n} \leqslant S_n$,故 $N(t) \leqslant \overline{N(t)}$,从而有 $m(t) \leqslant \overline{m(t)}$.所以

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leqslant \limsup_{t\to\infty} \frac{\overline{m(t)}}{t} \leqslant \frac{1}{b_A}. \tag{1.6.13}$$

由于 A 的任意性,令 $A \to \infty$,则有

$$b_A = \int_0^{\infty} x dF(x) \to \int_0^{\infty} x dF(x) = b$$

和

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} \leqslant \frac{1}{b}. \tag{1.6.14}$$

由(1.6.11)与(1.6.14)立得$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{m(t)}{t} = \dfrac{1}{b}$.

当 $b = \infty$ 时,仍利用上述的更新过程$\{\overline{N(t)}, t \geqslant 0\}$,由(1.6.14),当 $A \to \infty$ 时,由于 $b_A \to \infty$,立得$\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{m(t)}{t} = 0$;从而$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{m(t)}{t} = 0$,定理 1.6.2 证毕.

定理 1.6.3(关键更新定理) 设 $Q(t)$在区间$[0,\infty)$内是一个非负、不增函数,且

$$\int_0^{\infty} Q(t)dt < \infty .$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-\tau)dm(\tau) = \frac{1}{b}\int_0^{\infty} Q(t)dt . \quad (1.6.15)$$

若 $b=\infty$, $\frac{1}{b} \equiv 0$.

定理 1.6.4 如果 $F(t)$不是格子分布函数,则对每个 $h>0$ 有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)-m(t-h)}{h} = \begin{cases} \frac{1}{b}, b<\infty, \\ 0, \ b=\infty. \end{cases} \quad (1.6.16)$$

如果

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k U(t-k\tau), \quad (1.6.17)$$

其中 $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1, p_k \geqslant 0, k=0,1,2,\cdots, p_0 = 0$,且 τ 是一个正常数(称为周期),则称 $F(t)$ 为格子分布函数.

证 在定理 1.6.3 中,令

$$Q(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<h, \\ 0, & t>h. \end{cases}$$

则由(1.6.15) 得

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t Q(t-\tau)dm(\tau) = \lim_{t\to\infty}\int_{t-h}^t dm(\tau) = \lim_{t\to\infty}[m(t)-m(t-h)] =$$

$\frac{1}{b}\int_0^h dt = \frac{h}{b}$,即 $\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)-m(t-h)}{h} = \frac{1}{b}$.定理证毕.

1.6.3 年龄与剩余寿命的分布

在任意时刻 $t(t>0)$记

$$\begin{cases} \xi_-(t) = t - S_{N(t)}, \\ \xi_+(t) = S_{N(t)+1} - t. \end{cases} \quad (1.6.18)$$

称 $\xi_-(t)$,$\xi_+(t)$分别为时刻 t 时元件(随机变量 ξ)的年龄与剩余寿命. $\xi_-(t)$表示从 t 之前的上一个更新瞬时刻到 t 之间这一段时间的长,$\xi_+(t)$表示从 t 到 t 之后的下一个更新瞬时之间这一

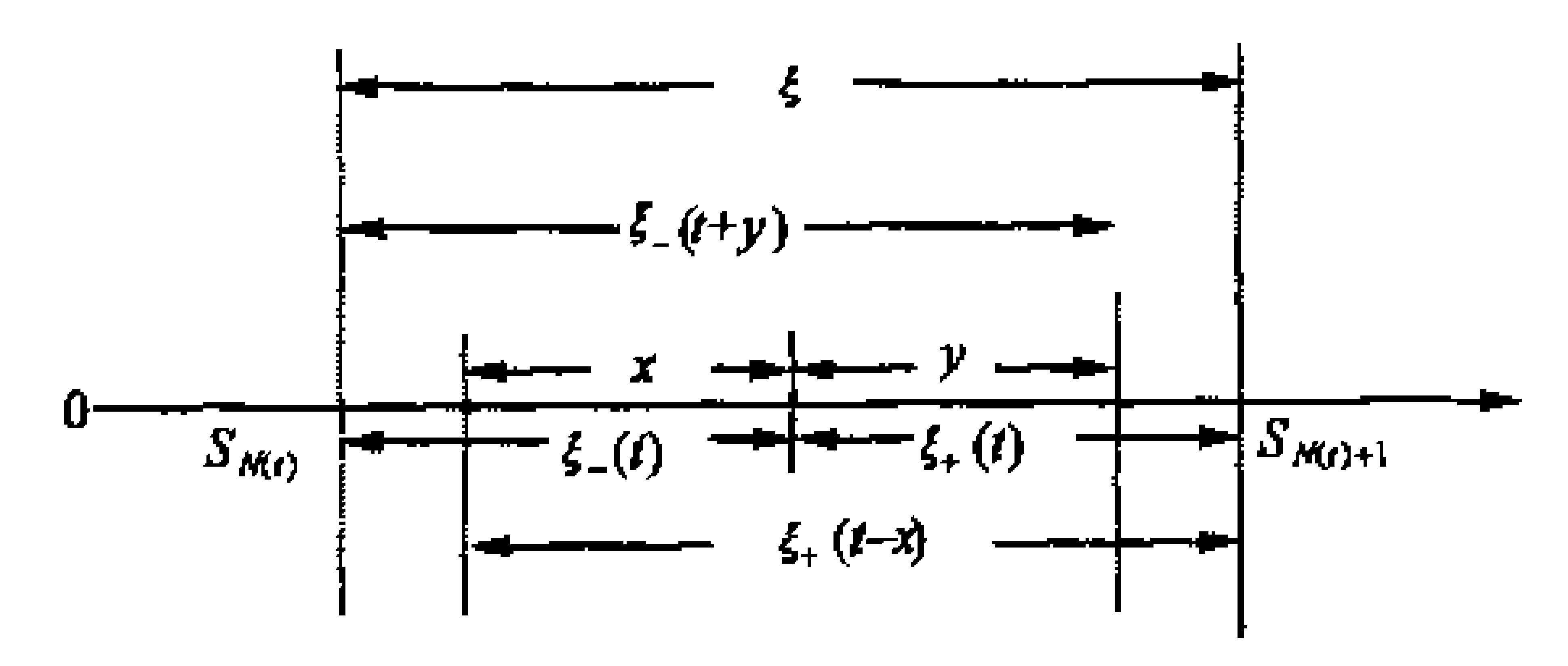


图 1-4

段时间的长(见图 1-4).

现考虑 $\xi_-(t)$ 的分布. 显然有 $0 \leqslant \xi_-(t) \leqslant t$, 且对于任意 $x \in (0, t]$, 由全概率公式与(1.6.2)有

$$
\begin{aligned}
P\{\xi_-(t) < x\} &= P\{t - S_{N(t)} < x\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - S_{N(t)} < x, N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - S_n < x, N(t) = n\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - x < S_n < t, S_{n+1} \geqslant t\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^{t} P\{S_{n+1} \geqslant t \mid S_n = u\} dP\{S_n < u\} \quad [\text{由}(1.6.4)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^{t} P\{\xi_2 \geqslant t - u\} dP\{S_n < u\} \\
&= \int_{t-x}^{t} [1 - F(t-u)] dm(u).
\end{aligned}
$$

从而

$$
P\{\xi_-(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \int_{t-x}^{t} [1 - F(t-u)] dm(u), & 0 < x \leqslant t. \\ 1, & x > t. \end{cases} \quad (1.6.19)
$$

类似地, 对于任意 $y > 0$ 有

$$
P\{\xi_+(t) < y\} = P\{S_{N(t)+1} < t + y\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S_{n+1} < t + y, N(t) = n\}
$$

$$= F_1(t+y) - F_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t P\{t-u \leqslant \xi_{n+1} < t+y-u\} dP\{S_n < u\}$$

$$= F_1(t+y) - F_1(t) + \int_0^t [F(t+y+u) - F(t-u)] dm(u),$$

$$= m(t+y) - m(t) = \int_t^{t+y} F(t+y-u) dm(u)$$

$$= \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u). \qquad [\text{由}(1.6.6)]$$

从而

$$P\{\xi_+(t) < y\} = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ \int_t^{t+y} [1 - F(t+y-u)] dm(u), & y > 0. \end{cases} \qquad (1.6.20)$$

特别当 $\xi_2 \sim \Gamma(1, \lambda)$ 时，则 $m(u) = \lambda u$，$1 - F(t) = e^{-\lambda t}$，$t > 0$，从而(1.6.19)与(1.6.20)分别变为

$$P\{\xi_-(t) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & 0 < x \leqslant t, \\ 1, & x > t, \end{cases}$$

与

$$P\{\xi_+(t) < y\} = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda y}, & y > 0. \end{cases}$$

此即定理 1.3.3.

现讨论 $(\xi_-(t), \xi_+(t))$ 的联合概率分布. 因为当 $0 < x \leqslant t$，且 $y > 0$ 时.

$$P\{\xi_-(t) < x, \xi_+(t) < y\} = P\{t - S_{N(t)} < x, S_{N(t)+1} - t < y\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - S_{N(t)} < x, S_{N(t)+1} - t < y, N(t) = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{t - x < S_n < t, t \leqslant S_{n+1} < t + y\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t-x}^{t} P\{t - u \leqslant \xi_{n+1} < t + y - u\} dP\{S_n < u\}$$

$$= \int_{t-x}^{t} [F(t+y-u) - F(t-u)] dm(u). \qquad (1.6.21)$$

当 $0<t<x, y>0$ 时

$$P\{\xi_-(t)<x, \xi_+(t)<y\}=P\{\xi_+(t)<y\}$$
$$=\int_t^{t+y}[1-F(t+y-u)]dm(u).$$

从而得 $(\xi_-(t), \xi_+(t))$ 的联合分布函数

$$P\{\xi_-(t)<x,\xi_+(t)<y\}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ 或 } y\leqslant 0,\\ \int_{t-x}^{t}[F(t+y-u)-F(t-u)]dm(u), & \\ & 0<x\leqslant t, y>0,\\ \int_t^{t+y}[1-F(t+y-u)]dm(u), & \\ & 0<t<x, y>0.\end{cases}$$

由图 1-4 知

$$\{\xi_-(t)\geqslant x, \xi_+(t)\geqslant y\}=\{\xi_+(t-x)\geqslant x+y\}, \tag{1.6.22}$$
$$\{\xi_-(t)\geqslant x, \xi_+(t)\geqslant y\}=\{\xi_-(t+y)\geqslant x+y\}. \tag{1.6.23}$$

1.6.4 年龄与剩余寿命的极限分布

设 $\xi_-=\lim\limits_{t\to\infty}\xi_-(t), \xi_+=\lim\limits_{t\to\infty}\xi_+(t)$，则由概率论中依概率为 1 收敛必依分布收敛，有 $P\{\xi_-<x\}=\lim\limits_{t\to\infty}P\{\xi_-(t)<x\}$，$P\{\xi_+<y\}=\lim\limits_{t\to\infty}P\{\xi_+(t)<y\}, x\geqslant 0, y\geqslant 0$.

现求 ξ_- 的分布. 在定理 1.6.3 中，定义

$$Q(t)=\begin{cases}1-F(t), & 0<t\leqslant x,\\ 0, & t>x,\end{cases} \quad x>0. \tag{1.6.24}$$

则 $Q(t)$ 非负、不增，且 $\int_0^{\infty}Q(t)dt=\int_0^{x}[1-F(t)]dt<\infty$.

由(1.6.19)与(1.6.15)得

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-x}^{t}[1-F(t-u)]dm(u)=\lim_{t\to\infty}\int_0^{t}Q(t-u)dm(u)$$
$$=\frac{1}{b}\int_0^{\infty}Q(t)dt=\frac{1}{b}\int_0^{x}[1-F(t)]dt,$$

即

$$P\{\xi_- < x\} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^x [1-F(t)]dt, & x > 0. \end{cases} \quad (1.6.25)$$

现求 ξ_+ 的分布. 由(1.6.20)得

$$\int_t^{t+y} [1-F(t+y-u)]dm(u)$$

$$= [1-F(t+y-u)]m(u)\big|_t^{t+y} + \int_t^{t+y} m(u)dF(t+y-u)$$

$$= m(t+y) - m(t) + F(y)m(t) - \int_0^y m(t+y-\tau)dF(\tau)$$

$$= [m(t+y)-m(t)][1-F(y)] + \int_0^y [m(t+y)-m(t+y-\tau)]dF(\tau)$$

$$\to \frac{y}{b}[1-F(y)] + \int_0^y \frac{\tau}{b}dF(\tau) = \frac{1}{b}\int_0^y [1-F(\tau)]d\tau, \text{（当 } t\to\infty \text{ 时）}$$

从而 ξ_+ 的分布函数为

$$P\{\xi_+ < y\} = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^y [1-F(\tau)]d\tau, & y > 0. \end{cases} \quad (1.6.26)$$

由(1.6.25)与(1.6.26)知 ξ_- 与 ξ_+ 同分布. 当 ξ_2 为连续型随机变量时, ξ_-, ξ_+ 也为连续型随机变量, 且 ξ_-, ξ_+ 的密度函数分别为

$$f_-(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}[1-F(x)], & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}, \quad f_+(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}[1-F(y)], & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0 \end{cases} \quad (1.6.27)$$

且

$$E(\xi_-) = E(\xi_+) = \frac{1}{b}\int_0^\infty x[1-F(x)]dx = \frac{E(\xi_2^2)}{2b} = \frac{E(\xi_2^2)}{2E(\xi_2)}, \quad (1.6.28)$$

类似地

$$E(\xi_-^k) = E(\xi_+^k) = E(\xi_2^{k+1})/[(k+1)E(\xi_2)]. \quad (1.6.29)$$

记 $\xi_2^*(s)$, $\xi_-^*(s)$, $\xi_+^*(s)$ 分别为 ξ_2, ξ_-, ξ_+ 的 LST(拉普拉斯-司蒂阶变换). 则

$$\xi_-^*(s)=\xi_+^*(s)=\int_0^\infty e^{-sx}[1-F(x)]\frac{1}{b}dx$$
$$=-\int_0^\infty \frac{1}{sb}[1-F(x)]de^{-sx}$$
$$=\frac{1-\xi_2^*(s)}{bs}=\frac{1-\xi_2^*(s)}{SE(\xi_2)},\ R_e(s)>0, \qquad (1.6.30)$$

现求(ξ_-,ξ_+)的联合分布. 因为

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-x}^t [F(t+y-u)-F(t-u)]dm(u)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\int_{t-x}^t [1-F(t-u)]dm(u)-\int_{t-x}^t [1-F(t+y-u)]dm(u)\right\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\int_{t-x}^t [1-F(t-u)]dm(u)-\lim_{t\to\infty}\int_{t-x}^t [1-F(t+y-u)]dm(u).$$

类似于(1.6.25)的推导, 上式第一项为$\frac{1}{b}\int_0^x [1-F(t)]dt$. 为求第二项, 令

$$Q_1(t)=\begin{cases}1-F(t),\ y<t<x+y,\\ 0,\qquad\qquad 其它.\end{cases}$$

则 $Q_1(x)$非负、不增, 且$\int_0^\infty Q_1(t)dt=\int_y^{x+y}[1-F(t)]dt$, 由(1.6.15)得

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t-x}^t [1-F(t+y-u)]dm(u)=\lim_{t\to\infty}\int_{t-x}^t Q_1(t+y-u)dm(u)$$
$$=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau-y} Q_1(\tau-u)dm(u)=\frac{1}{b}\int_0^\infty Q_1(\tau)d\tau$$
$$=\frac{1}{b}\int_y^{x+y}[1-F(\tau)]d\tau=\frac{1}{b}\int_0^{x+y}[1-F(\tau)]d\tau-\frac{1}{b}\int_0^y [1-F(\tau)]d\tau, \qquad (1.6.31)$$

从而, 由(1.6.21), (ξ_-,ξ_+)的分布函数为

$$P\{\xi_-<x,\xi_+<y\}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 或 y\leqslant 0,\\ \frac{1}{b}\int_0^x [1-F(\tau)]d\tau+\frac{1}{b}\int_0^y [1-F(\tau)]d\tau & \\ -\frac{1}{b}\int_0^{x+y}[1-F(\tau)]d\tau, & x>0,\ y>0.\end{cases}$$

(1.6.32)

当 ξ_2 为连续型随机变量且有密度函数 $f(t)$ 时，则 (ξ_-,ξ_+) 为二维连续型随机向量，且由(1.6.32)其密度函数为

$$f_{-,+}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{b}f(x+y), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{1.6.33}$$

求 (ξ_-,ξ_+) 的分布函数的另一个方法：因为对于 $x>0,y>0$ 由(1.6.22)有

$$\{\xi_-(t)\geqslant x,\xi_+(t)\geqslant y\}=\{\xi_+(t-x)\geqslant x+y\},$$

令 $t\to\infty$，得 $$\{\xi_-\geqslant x,\xi_+\geqslant y\}=\{\xi_+\geqslant x+y\}. \tag{1.6.34}$$

从而

$$\begin{aligned}P\{\xi_-<x,\xi_+<y\}&=1-P\{\xi_-\geqslant x\}-P\{\xi_+\geqslant y\}+P\{\xi_-\geqslant x,\xi_+\geqslant y\}\\&=P\{\xi_-<x\}+P\{\xi_+<y\}-P\{\xi_+<x+y\},\end{aligned} \tag{1.6.35}$$

再由(1.6.25)，(1.6.26)与(1.6.35)立得(1.6.32)．由(1.6.34)得

$$\{\xi_-\geqslant x\}=\{\xi_-\geqslant x,\xi_+\geqslant 0\}=\{\xi_+\geqslant x\}. \tag{1.6.36}$$

从而知 ξ_- 与 ξ_+ 同分布．由(1.6.33)，(ξ_-,ξ_+) 的 LST 为

$$\begin{aligned}E(e^{-s_1\xi_--s_2\xi_+})&=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1x-s_2y}\frac{f(x+y)}{b}dxdy\\&=\frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-s_1x}\left[\int_x^\infty e^{-s_2(u-x)}f(u)du\right]dx\\&=\frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-s_2u}f(u)\left[\int_0^u e^{-s_1x+s_2x}dx\right]du\\&=\frac{1}{b(s_1-s_2)}\int_0^\infty[1-e^{-s_1u+s_2u}]e^{-s_2u}f(u)du\\&=\frac{\xi_2^*(s_2)-\xi_2^*(s_1)}{b(s_1-s_2)},\end{aligned} \tag{1.6.37}$$

令 $s_2=0,s_1=s$，得 $\xi_-^*(s)=\dfrac{1-\xi_2^*(s)}{bs}$，此即(1.6.30)式．令 $\eta=\xi_++\xi_-$，则 η 的密度函数为

$$f_\eta(t)=\int_{-\infty}^\infty f_{-,+}(x,t-x)dx=\begin{cases}tf(t)/b, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases} \tag{1.6.38}$$

且

$$E(\eta)=\frac{E(\xi_2^2)}{b}=\frac{E(\xi_2^2)}{E(\xi_2)}. \tag{1.6.39}$$

由(1.6.38)知，η 与 ξ_2 的分布不同.

当 $\xi_2\sim\Gamma(1,\lambda)$时，由(1.6.27)知，$\xi_-\sim\Gamma(1,\lambda)$，$\xi_+\sim\Gamma(1,\lambda)$. 而$(\xi_-,\xi_+)$的密度函数为

$$f_{-,+}(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases} \tag{1.6.40}$$

从而，ξ_-还与 ξ_+独立.

第二章　M/M/·系统

§2.1　平衡状态的一些结果

2.1.1　M/M/n 系统

设 $M/M/n$ 系统的输入过程 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的泊松过程，即到达间隔时间序列 $\{J_k, k\geqslant 0\}$ 为 i.i.d 随机变量序列，且 $J_1\sim\Gamma(1,\lambda)$. 服务机构有 n 个($n\geqslant 1$)服务台，每个服务台独立工作，且具有相同分布的服务时间 B, $B\sim\Gamma(1,\mu)$，即顾客的服务时间序列 $\{B_k, k\geqslant 1\}$ 为 i.i.d 随机变量序列，且 $B_1\sim\Gamma(1,\mu)$. 并设 $\{B_k, k\geqslant 1\}$ 与 $\{J_k, k\geqslant 1\}$ 独立.

设 $X(t)$ 表示时间 t 时系统中的顾客数（包括正在服务的顾客数），即 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 为系统的状态过程. 设

$$\{t<X_k<t+\Delta t\}.$$

表示服务机构有 k 个服务台在时间间隔 $(t, t+\Delta t)$ 中结束服务 $(0\leqslant k\leqslant n)$. 因为一个服务台在时刻 t 正在服务，经 Δt 时间后，它没有结束服务的概率（由定理 1.3.1）为

$$P\{B>t+\Delta t\mid B>t\}=P\{B>\Delta t\}=e^{-\mu\Delta t}$$
$$=1-\mu\Delta t+o(\Delta t).\qquad(2.1.1)$$

从而它结束服务的概率为

$$P\{B\leqslant t+\Delta t\mid B>t\}=1-e^{-\mu\Delta t}=\mu\Delta t+o(\Delta t).\quad(2.1.2)$$

又因 $\{N(t+\Delta t)-N(t)=n\}$ 与 $\{X(t)=i\}$ 独立，所以由(1.3.9)式有

$$p_{i,i+1}(\Delta t)\equiv P\{X(t+\Delta t)=i+1\mid X(t)=i\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\min(i,n)}P\{t<X_k<t+\Delta t, N(t+\Delta t)-N(t)$$
$$=k+1\mid X(t)=i\}$$
$$=P\{t<X_0<t+\Delta t, N(t+\Delta t)-N(t)=1\mid X(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= i\} + o(\Delta t) \\
&= P\{t < X_0 < t + \Delta t \mid X(t) = i\} P\{N(t+\Delta t) - N(t) \\
&= 1\} + o(\Delta t) \\
&= (e^{-\mu\Delta t})^{\min(i,n)} \lambda \Delta t e^{-\lambda\Delta t} + o(\Delta t) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t), i \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{2.1.3}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{i,i-1}(\Delta t) &\equiv P\{X(t+\Delta t) = i-1 \mid X(t) = i\} \\
&= \sum_{k=1}^{\min(i,n)} P\{t < X_k < t+\Delta t, N(t+\Delta t) - N(t) = k-1 \mid X(t) = i\} \\
&= P\{t < X_1 < t+\Delta t, N(t+\Delta t) - N(t) = 0 \mid X(t) = i\} \\
&\quad + P\{t < X_2 < t+\Delta t, N(t+\Delta t) - N(t) = 1 \mid X(t) = i\} + o(\Delta t) \\
&= C^1_{\min(i,n)}(1 - e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^{\min(i,n)-1} e^{-\lambda\Delta t} \\
&\quad + C^2_{\min(i,n)}(1 - e^{\mu\Delta t})^2 (e^{-\mu\Delta t})^{\min(i,n)-2} \lambda \Delta t e^{-\lambda\Delta t} + o(\Delta t) \\
&= \min(i,n)\mu\Delta t + o(\Delta t) \\
&= \begin{cases} i\mu\Delta t + o(\Delta t), & i = 1,2,\cdots,n-1, \\ n\mu\Delta t + o(\Delta t), & i = n, n+1\cdots. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.1.4}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(\Delta t) &\equiv P\{X(t+\Delta t) = j \mid X(t) = i\} \\
&= o(\Delta t), |j - i| \geqslant 2,
\end{aligned} \tag{2.1.5}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
p_{ii}(\Delta t) &\equiv P\{X(t+\Delta t) = i \mid X(t) = i\} \\
&= 1 - \lambda\Delta t - \mu_i \Delta t + o(\Delta t),
\end{aligned} \tag{2.1.6}
$$

其中

$$
\mu_i = \begin{cases} i\mu, & i = 1,2,\cdots,n-1, \\ n\mu, & i = n, n+2,\cdots. \end{cases} \tag{2.1.7}
$$

从而知$\{X(t), t \geqslant 0\}$是生灭过程,且生率为

$$
\lambda_i = \lambda, \quad i = 0,1,2,\cdots, \tag{2.1.8}
$$

灭率由(2.1.7)式给出.

由 (1.5.25) 与 (1.5.26) 两式知,当 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k} < \infty$ 时,即

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k < \infty,$$

也即

$$\rho \equiv \frac{\lambda}{n\mu} < 1 \tag{2.1.9}$$

时，该生灭过程有平稳分布，且平稳分布为

$$\pi_k = \begin{cases} \dfrac{(n\rho)^k \pi_0}{k!}, & k = 1, 2, \cdots, n-1, \\ \dfrac{n^n \rho^k \pi_0}{n!}, & k = n, n+1, \cdots, \end{cases} \tag{2.1.10}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!\ (1-\rho)}\right]^{-1}, \tag{2.1.11}$$

其中 π_k 表示系统处于平衡后系统中有 k 个顾客的概率．由(1.5.26)与(2.1.9)式知．该生灭过程存在平稳分布充要条件为 $\rho<1$．称 ρ 为系统的服务强度．

由平稳分布可得 $M/M/n$ 系统如下几个数量指标．

(1) 平均队长、平均等待队长

用 X 表示系统在 $\rho<$ 下的队长，用 X_q 表示系统的等待队长，则由(2.1.10)与(2.1.11)式得

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k(n\rho)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{kn^n\rho^k}{n!}\right]\pi_0$$

$$= \left\{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{(n\rho)^n[\rho + n(1-\rho)]}{n!(1-\rho)^2}\right\}\pi_0. \tag{2.1.12}$$

由(2.1.10)与(2.1.11)式得 X_q 的分布律：

$$\begin{cases} P\{X_q = k\} = \pi_{n+k} = \dfrac{n^n \rho^{n+k}}{n!}\pi_0, & k = 1, 2, 3, \cdots \\ P\{X_q = 0\} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \pi_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(n\rho)^j}{j!}\pi_0, \end{cases} \tag{2.1.13}$$

π_0 由(2.1.11)式确定．从而得

$$E(X_q) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(n\rho)^n \rho^k}{n!}\pi_0 = \frac{(n\rho)^n \rho}{n!(1-\rho)^2}\pi_0 = \frac{\rho\pi_n}{(1-\rho)^2}. \tag{2.1.14}$$

(2) 平均占用服务台数 K 为

$$K = E(X) - E(X_q) = \left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{(n\rho)^n[\rho + n(1-\rho)]}{n!(1-\rho)^2}\right]$$

$$\cdot \pi_0 - \frac{(n\rho)^n\rho\pi_0}{n!(1-\rho)^2}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{(n\rho)^n}{(n-1)!(1-\rho)}\right]\pi_0$$

$$= n\rho\pi_0\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{n\rho(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}\pi_0 = n\rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (2.1.15)$$

所以

$$E(X)=E(X_q) + K = \frac{(n\rho)^n\rho\pi_0}{n!\ (1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho\pi_n}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.1.16)$$

(3)顾客到达服务机构需要等待的概率 p 为

$$p = P\{X \geqslant n\} = \sum_{k=n}^{\infty}\pi_k = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{n^n\rho^k}{n!}\pi_0 = \frac{(n\rho)^n}{n!\ (1-\rho)}\pi_0 = \frac{\pi_n}{1-\rho}. \quad (2.1.17)$$

因此顾客到达不需要等待的概率为

$$1 - p = 1 - \frac{(n\rho)^n}{n!\ (1-\rho)}\pi_0 = \frac{1-\rho-\pi_n}{1-\rho}. \qquad (2.1.18)$$

(4) 等待时间的分布

设 W 为在系统平稳条件 $\rho<1$ 下一个顾客的等待时间，则

$$P\{W=0\} = p\{X<n\} = 1 - \frac{\pi_n}{1-\rho}. \qquad (2.1.19)$$

对 $\forall$ 实数 $t>0$, W 的分布函数为

$$F_W(t) = P\{W<t\} = P\{W=0\} + P\{0<W<t\}.$$

又因 $\quad P\{0<W<t\} = \sum_{k=n}^{\infty}P\{0<W<t \mid X=k\}P\{X=k\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}P\{0<W<t \mid X=k\}\pi_k$$

(由定理 1.1.4 与定理 1.1.5)

$$= \sum_{k=n}^{\infty}\pi_k\int_0^t\frac{(n\mu)^{k-n+1}x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)}e^{-n\mu x}dx \qquad (\text{因 } \pi_k = \pi_n\rho^{k-n})$$

$$= \int_0^t \pi_n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(n\mu x\rho)^{k-n}}{(k-n)!} n\mu e^{-n\mu x} dx$$

$$= n\mu\pi_n \int_0^t e^{-n\mu(1-\rho)x} dx$$

$$= \frac{\pi_n}{1-\rho}[1 - e^{-n\mu(1-\rho)t}],$$

故

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1 - \dfrac{\pi_n}{1-\rho} e^{-n\mu(1-\rho)t}, & t > 0. \end{cases} \tag{2.1.20}$$

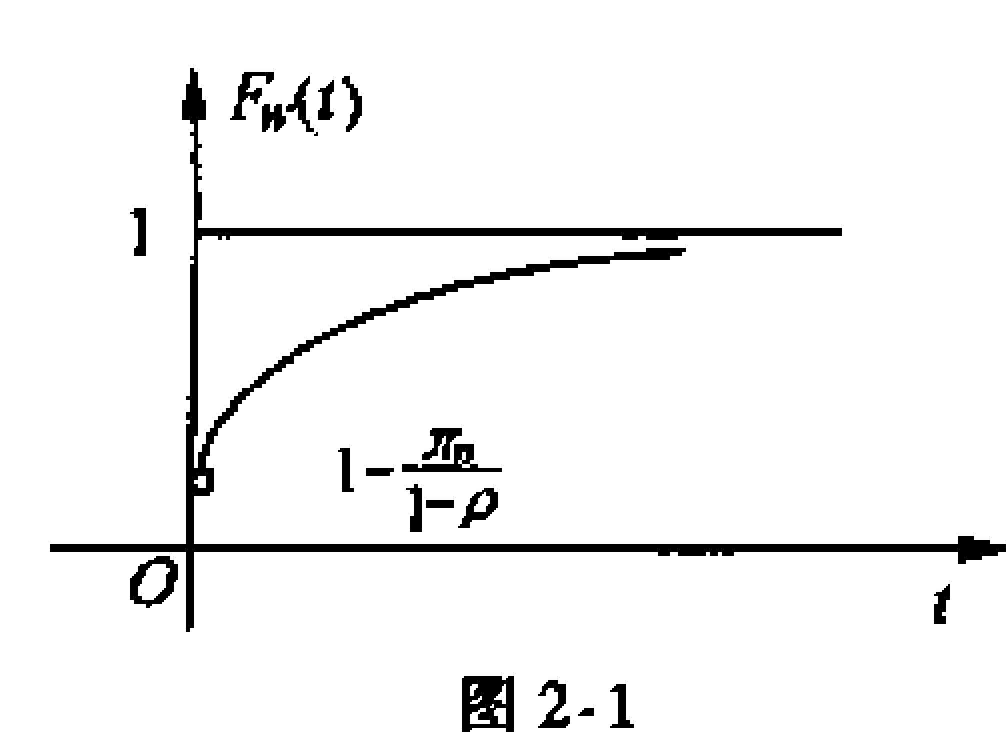


图 2-1

$F_W(t)$的图形如图 2-1 所示. 易见, 在 $t=0$ 处 $F_W(t)$不连续, 所以 W 不是连续型随机变量. 因为 $F_W(t)$的图形不是阶梯形的, 故 W 也不是离散型随机变量. 由(2.1.20)式, W 的密度函数为

$$f_W(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \left(1 - \dfrac{\pi_n}{1-\rho}\right)\delta(t) + n\mu\pi_n e^{-n\mu(1-\rho)t}, & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.1.21}$$

其中 $\delta(t)$为 Dirac 函数, 简称为 δ 函数. 它有如下性质:

(i) 当 $t \neq 0$ 时, $\delta(t)=0$; 当 $t=0$ 时 $\delta(t)=\infty$.

(ii) $\delta(-t)=\delta(t)$.

(iii) 对任意连续函数 $\varphi(t)$有 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)dt = \varphi(0)$.

$\delta(t)$可以看成单位跳跃函数

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0 \end{cases} \tag{2.1.22}$$

的导数, 即

$$\delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}. \tag{2.1.23}$$

由(2.1.20)或(2.1.21)式可得 W 的数学期望:

$$E(W) = \int_{0-}^{\infty} t f_W(t) dt$$

$$= \int_{0-}^{\infty}(1-\frac{\pi_n}{1-\rho})\delta(t)tdt + \int_{0-}^{\infty} n\mu\pi_n te^{-n\mu(1-\rho)t}dt$$

$$= \frac{\pi_n}{n\mu(1-\rho)^2} = \frac{\rho\pi_n}{\lambda(1-\rho)^2} = \frac{E(X_q)}{\lambda}. \qquad (2.1.24)$$

因为 $$E(W^2) = \frac{\pi_n}{1-\rho}\int_0^{\infty} t^2 n\mu(1-\rho)e^{-n\mu(1-\rho)t}dt$$

$$= \frac{2\pi_n}{(n\mu)^2(1-\rho)^3},$$

所以 $$D(W) = \frac{\pi_n[2(1-\rho)-\pi_n]\rho^2}{\lambda^2(1-\rho)^4}. \qquad (2.1.25)$$

(5) 逗留时间的分布

在系统平稳条件下,设 T 为任一顾客在系统中的逗留时间,由于顾客的服务时间 B 与 W 独立,则有

$$T = W + B. \qquad (2.1.26)$$

所以

$$E(T) = E(W) + E(B) = \frac{\rho\pi_n}{\lambda(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu} = \frac{E(X)}{\lambda}, \qquad (2.1.27)$$

$$D(T) = D(W) + D(B) = \frac{\pi_n[2(1-\rho)-\pi_n]\rho^2}{\lambda^2(1-\rho)^4} + \frac{1}{\mu^2}, \qquad (2.1.28)$$

因为当 $t>0$ 时,

$$P\{T<t\} = P\{W+B<t\}$$

$$= \int_0^t P\{W+B<t \mid B=x\}\mu e^{-\mu x}dx$$

$$= \int_0^t P\{W<t-x\}\mu e^{-\mu x}dx \qquad \text{(由(2.1.20)式)}$$

$$= \int_0^t \left[1-\frac{\pi_n}{1-\rho}e^{-(n\mu-\lambda)(t-x)}\right]\mu e^{-\mu x}dx$$

$$= \begin{cases} 1-e^{-\mu t}-\dfrac{\mu t\pi_n}{1-\rho}e^{-(n\mu-\lambda)t}, & n\mu=\lambda+\mu \\ 1-e^{-\mu t}-\dfrac{\mu\pi_n}{(1-\rho)(n\mu-\lambda-\mu)}[e^{-\mu t}-e^{-(n\mu-\lambda)t}], & n\mu\neq\lambda+\mu, \end{cases}$$

故 T 的分布函数为

$$F_T(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1-e^{-\mu t}-n\mu t\pi_n e^{-\mu t}, n\mu=\lambda+\mu, & t>0,\\ 1-e^{-\mu t}-\dfrac{\mu\pi_n}{(1-\rho)(n\mu-\lambda-\mu)} & \\ \times[e^{-\mu t}-e^{-(n\mu-\lambda)t}],\ n\mu\neq\lambda+\mu, t>0 & \end{cases} \tag{2.1.29}$$

显然 T 是连续型随机变量，T 的密度函数为

$$f_T(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ (n\mu^2 t\pi_n+\mu-n\mu\pi_n)e^{-\mu t},\ n\mu=\lambda+\mu, t>0, & \\ \left[\mu+\dfrac{\mu^2\pi_n}{(1-\rho)(n\mu-\lambda-\mu)}\right]e^{-\mu t}-\dfrac{n\mu^2\pi_n}{n\mu-\lambda-\mu} & \\ \times e^{-(n\mu-\lambda)t}, n\mu\neq\lambda+\mu, & t>0\end{cases} \tag{2.1.30}$$

2.1.2 $M/M/1$ 系统

对于先到先服务等待制系统 $M/M/n$，当 $n=1$ 时，可得相应的系统 $M/M/1$ 的诸指标值.

由(2.1.10)与(2.1.11)式，得队长 X 的分布律：

$$\begin{cases}\pi_k=\pi_0\rho^k, & k=1,2,3,\cdots,\\ \pi_0=\left[\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho^k+1\right]^{-1}=1-\rho,\ \rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1, & \end{cases}$$

即

$$\pi_k=(1-\rho)\rho^k,\ k=0,1,2,\cdots. \tag{2.1.31}$$

故

$$E(X)=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}, \tag{2.1.32}$$

$$D(X)=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}. \tag{2.1.33}$$

等待队长 X_q 的分布为

$$\begin{cases}P\{X_q=0\}=\pi_0+\pi_1=1-\rho^2,\\ P\{X_q=k\}=\pi_{k+1}=(1-\rho)\rho^{k+1}, k=1,2,3\cdots.\end{cases} \tag{2.1.34}$$

从而

$$E(X_q)=\frac{\rho^2}{1-\rho},D(X_q)=\frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}. \qquad (2.1.35)$$

平均占用服务台数 K 为

$$K=\rho=\frac{\lambda}{\mu}. \qquad (2.1.36)$$

顾客到达不需要等待的概率为

$$\pi_0=1-\rho. \qquad (2.1.37)$$

等待时间 W 的分布函数为

$$F_W(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1-\rho e^{-\mu(1-\rho)t}, & t>0.\end{cases} \qquad (2.1.38)$$

等待时间 W 的密度函数为

$$f_w(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ (1-\rho)\delta(t)+\mu\rho(1-\rho)e^{-\mu(1-\rho)t}, & t>0.\end{cases}$$

$$(2.1.39)$$

平均等待时间为

$$E(W)=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}=\frac{E(X_q)}{\lambda}. \qquad (2.1.40)$$

平均等待时间方差为

$$D(W)=\frac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}. \qquad (2.1.41)$$

逗留时间 T 的密度函数为

$$f_T(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ (\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}, & t>0.\end{cases} \qquad (2.1.42)$$

从而知

$$T\sim\Gamma(1,\mu-\lambda),E(T)=\frac{1}{\mu-\lambda},D(T)=\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}. \qquad (2.1.43)$$

例 2.1.1 对于系统 $M/M/1$,设生率 $\lambda_i=\frac{\lambda}{i+1}$, $i=0,1,2,3,\cdots$, $\lambda>0$,灭率为 $\mu_0=0$, $\mu_i=\mu$, $i=1,2,3,\cdots$, $\mu>0$,即每个顾客的服务时间 $B\sim\Gamma(1,\mu)$,顾客到达间隔时间服从参数为 $\lambda_i=\frac{\lambda}{i+1}$的指数分布,这里 i 是系统的状态.或者可以这样理解:到达

时间间隔服从参数为 λ 的指数分布. 但每个到达顾客以概率$\frac{1}{i+1}$进入系统,而 i 是到达时系统中顾客数. 易见,当系统中的顾客数 i 越大,进入的概率就越小. 对于这样的排队系统,现来讨论队长的分布律和其它数量指标.

由(1.5.25)与(1.5.26)式知,队长 X 的分布律为

$$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0,\ k\geqslant1,$$

$$\pi_0=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\right]^{-1}=e^{-\rho},\ \rho\equiv\frac{\lambda}{\mu}.$$

故

$$\pi_k=e^{-\rho}\frac{\rho^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots,\quad 即\ X\sim P(\rho).\quad(2.1.44)$$

从而

$$E(X)=D(X)=\rho.$$

注意:这里 ρ 不是服务强度. 为求服务强度,先来求平均进入率 $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ 等于$\frac{\lambda}{k+1}$与到达时系统中有 k 个顾客的概率之积的和 ,即

$$\bar{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{k+1}\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda}{k+1}e^{-\rho}\frac{\rho^k}{k!}=\mu(1-e^{-\rho}).\quad(2.1.45)$$

所以系统的服务强度为

$$\bar{\rho}=\frac{\bar{\lambda}}{\mu}=1-e^{-\rho},\quad(2.1.46)$$

到达的顾客进入系统的概率为

$$\begin{aligned}&P\{到达顾客进入系统\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{到达顾客进入系统\mid X=k\}p\{X=k\}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}e^{-\rho}\frac{\rho^k}{k!}=(1-e^{-\rho})/\rho.\end{aligned}\quad(2.1.47)$$

由(2.1.44)式,排队长 X_q 的分布律为

$$\begin{cases}P\{X_q=0\}=\pi_0+\pi_1=e^{-\rho}(1+\rho),\\P\{X_q=k\}=\pi_{k+1}=e^{-\rho}\dfrac{\rho^{k+1}}{(k+1)!},\ k=1,2,3,\cdots\end{cases}\quad(2.1.48)$$

故

$$E(X_q)=e^{-\rho}+\rho-1. \qquad (2.1.49)$$

现来讨论进入系统的顾客等待时间 W 的分布.对任意实数 $t>0$,因为

$$F_w(t)=P\{W<t\}=P\{W=0\}+P\{0<W<t\},$$

而

$$\begin{aligned}P\{W=0\}&=P\{X=0|\text{顾客进入系统}\}\\&=P\{X=0,\ \text{顾客进入系统}\}/P\{\text{顾客进入系统}\}\\&=P\{\text{顾客进入系统}|X=0\}P\{X=0\}/P\{\text{顾客进入系统}\}\\&=\frac{1}{0+1}\pi_0\Big/\left[\frac{1}{\rho}(1-e^{-\rho})\right]=\frac{\rho e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}},\end{aligned} \qquad (2.1.50)$$

$$\begin{aligned}P\{0<W<t\}&=P\{0<W<t|\text{顾客进入系统}\}\\&=P\{0<W<t,\text{顾客进入系统}\}/P\{\text{顾客进入系统}\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}P\{0<W<t\mid X=k\triangle\text{顾客进入系统}\}\\&\quad\cdot P\{x=k\mid\text{顾客进入系统}\}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\frac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu x}dx\cdot\frac{\pi_k}{k+1}\cdot\frac{\rho}{1-e^{-\rho}},\end{aligned}$$

所以 W 的分布函数为

$$F_w(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \dfrac{\rho e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}}+\dfrac{\rho e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\rho^k}{(k+1)!}\displaystyle\int_0^t\dfrac{\mu^k x^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu x}dx, & t>0.\end{cases} \qquad (2.1.51)$$

故 W 的密度函数为

$$f_w(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ \dfrac{\rho e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}}\delta(t)+\dfrac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\dfrac{\mu^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu t}, & t>0\end{cases} \qquad (2.1.52)$$

W 的数学期望为

$$E(W)=\int_0^{\infty} tf_w(t)dt=\frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k}{\mu}$$

$$=\frac{e^{-\rho}}{(1-e^{-\rho})\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\rho^{k+1}}{k!}-\frac{\rho^{k+1}}{(k+1)!}\right]=\frac{e^{-\rho}+\rho-1}{\mu(1-e^{-\rho})}=\frac{E(X_q)}{\bar{\lambda}}. \tag{2.1.53}$$

2.1.3 $M/M/n/n$ 系统

对于系统 $M/M/n/n$ 来说,如果顾客到达服务机构时有服务台闲着,他就立刻进入服务,否则,他将离开,永不再来.其它假设与 2.1.1 节相同.

类似于 2.1.1 节的证明,系统 $M/M/n/n$ 的状态过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 也是生灭过程,其状态空间为 $I_n=\{0,1,2,\cdots,n\}$,其生、灭率分别为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda, & i=0,1,2,\cdots,n-1,\\ \mu_i=i\mu, & i=0,1,2,\cdots,n.\end{cases} \tag{2.1.54}$$

由(1.5.25)与(1.5.26)式知,队长 X 的分布律为

$$\pi_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

$$\pi_0=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1},$$

即

$$\pi_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\Big/\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right],\quad k=0,1,2,\cdots n, \tag{2.1.55}$$

所以平均队长为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\pi_k=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\Big/\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]. \tag{2.1.56}$$

系统的损失律为

$$\pi_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\Big/\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]. \tag{2.1.57}$$

2.1.4 $M/M/\infty$系统

现在的 $M/M/\infty$系统有无穷多个服务台，用类似于 2.1.1 节的方法可以证明该系统的状态过程$\{X(t),t\geqslant 0\}$为生灭过程，其生灭率分别为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda, i=0,1,2,\cdots, & \lambda>0,\\ \mu_i=i\mu, \ i=0,1,2,\cdots, & \mu>0,\end{cases} \tag{2.1.58}$$

该状态过程平稳分布存在．由(1.5.25)与(1.5.26)式，得系统队长 X 的分布律为

$$\pi_k=e^{-\lambda/\mu}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k=0,1,2,\cdots, \text{即 } X\sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{2.1.59}$$

2.1.5 利特尔(Little)公式

由 2.1.1 节到 2.1.3 节知，$E(W)$与 $E(X_q)$有关系：

$$E(W)=E(X_q)/\overline{\lambda}. \tag{2.1.60}$$

$E(T)$与 $E(X)$有关系：

$$E(T)=E(X)/\overline{\lambda}, \tag{2.1.61}$$

其中 $\overline{\lambda}$ 为系统的进入率，$E(X_q)$为平均排队长，$E(X)$为平均队长，$E(W)$，$E(T)$分别为平均等待时间和平均逗留时间．上述两个公式长期以来都是以经验公式被使用的，一直到 1961 年 J. D. C. Little 才第一次给出系统的证明．1974 年 S. Slidhan 给出了最一般的证明．现我们介绍上两个公式的证明．

设 $\alpha(t)$为在$(0,t]$时间区间中进入系统的顾客数，则在这段时间中的进入率为

$$\overline{\lambda}_t=\frac{E[\alpha(t)]}{t}. \tag{2.1.62}$$

设 $\gamma(t)$为 $\alpha(t)$个顾客到时刻 t 为止花在系统中的总时间，因此在这段时间里每个顾客的平均逗留时间为

$$\overline{T}_t=\frac{E[\gamma(t)]}{E[\alpha(t)]}. \tag{2.1.63}$$

故在这段时间里单位时间中系统中的平均顾客数为

$$\overline{X}_t = \frac{E[\gamma(t)]}{t}. \tag{2.1.64}$$

从而

$$\overline{X}_t = \frac{E[\gamma(t)]}{E[\alpha(t)]} \cdot \frac{E[\alpha(t)]}{t}. \tag{2.1.65}$$

记

$\overline{\lambda} = \lim\limits_{t\to\infty}\overline{\lambda}_t$, $E(T) = \lim\limits_{t\to\infty}\overline{T}_t$, $E(X) = \lim\limits_{t\to\infty}\overline{X}_t$. 则在平衡条件下，这些极限存在，从而得 $E(X) = \overline{\lambda}E(T)$，即 $E(T) = E(X)/\overline{\lambda}$.

设 $\gamma^*(t)$为在$(0,t]$中进入系统的 $\alpha(t)$个顾客到时刻 t 为止等待时间之和. 则每个顾客平均等待时间为

$$\overline{W}_t = \frac{E[\gamma^*(t)]}{E[\alpha(t)]}. \tag{2.1.66}$$

从而在$(0,t]$中单位时间内系统中等待的顾客平均数为

$$\overline{X}_{qt} = \frac{E[\gamma^*(t)]}{t} = \frac{E[\gamma^*(t)]}{E[\alpha(t)]} \cdot \frac{E[\alpha(t)]}{t}.$$

故当 $\overline{\lambda} \equiv \lim\limits_{t\to\infty}\overline{\lambda}_t$, $E(W) \equiv \lim\limits_{t\to\infty}\overline{W}_t$存在时，则 $E(X_q) \equiv \lim\limits_{t\to\infty}\overline{X}_{qt}$存在，从而得 $E(X_q) = \overline{\lambda}E(W)$，即 $E(W) = E(X_q)/\overline{\lambda}$. 上述两公式的推导与到达间隔时间、服务时间、以及排队规则无关.

2.1.6 $M/M/n/N$ 系统($n \leqslant N$)

现在的系统 $M/M/n/N$ 为混合制系统. 若顾客到达时服务台空闲，到达的顾客立刻进入服务. 若顾客到达时 n 个服务台不空闲且系统中的顾客数小于N，则他排到队末等待服务，否则他立即离开，永不再来. 显然，当 $N = n$ 时，它就是 2.1.3 节中的损失制系统，当 $N = \infty$时，它就是 2.2.1 节中的系统 $M/M/n$，当 $N = n = \infty$时，它就是 2.1.4 节中的系统 $M/M/\infty$.

类似 2.1.1 节中的推导，系统 $M/M/n/N$ 的状态过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$为生灭过程，其状态空间为 $I_n = \{0,1,2,\cdots N\}$，其生、灭率分别为

$$\begin{cases}\lambda_i=\lambda,\ i=0,1,\cdots,N-1,\lambda>0,\\ \mu_i=\begin{cases}i\mu,\ i=0,1,2,\cdots,n-1,\\ n\mu,\ i=n,n+1,\cdots,N,\end{cases} \quad \mu>0.\end{cases} \tag{2.1.67}$$

记 $\rho=\frac{\lambda}{n\mu}$,由(1.5.25)与(1.5.26)知,队长 X 的分布（系统状态的平稳分布)为

$$\begin{cases}\pi_k=\begin{cases}\dfrac{(n\rho)^k\pi_0}{k!},\ k=1,2,\cdots,n-1,\\ \dfrac{(n\rho)^k\pi_0}{n!\ n^{k-n}},\ k=n,n+1,\cdots,N,\end{cases}\\ \pi_0=\left[\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{(n\rho)^k}{k!}+\sum_{k=n}^{N}\dfrac{(n\rho)^k}{n!n^{k-n}}\right]^{-1}.\end{cases} \tag{2.1.68}$$

从而,平均队长为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{N}k\pi_k=\frac{\lambda}{\mu}(1-\pi_n)$$
$$+\frac{\rho(n\rho)^n\pi_0}{n!\ (1-\rho)^2}[1-(N-n+1)\rho^{N-n}+(N-n)\rho^{N-n+1}]. \tag{2.1.69}$$

排队长的分布为

$$P\{X_q=k\}=\pi_{n+k}=\frac{(n\rho)^{n+k}}{n!n^k}\pi_0,\quad k=1,2,\cdots,N-n,$$
$$P\{X_q=0\}=\sum_{k=0}^{n}\pi_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{(n\rho)^k}{k!}\pi_0. \tag{2.1.70}$$

平均排队长为

$$E(X_q)=\sum_{k=0}^{N-n}k\frac{(n\rho)^{n+k}}{n!n^k}\pi_0=\frac{\rho\pi_0(n\rho)^n}{n!}\sum_{k=1}^{N-n}k\rho^{k-1}$$
$$=\frac{\rho\pi_0(n\rho)^n}{n!(1-\rho)^2}[1-(N-n+1)\rho^{N-n}+(N-n)\rho^{N-n+1}]. \tag{2.1.71}$$

损失率为

$$\pi_N=\frac{(n\rho)^N\pi_0}{n!n^{N-n}}=\frac{n^n\rho^N}{n!}\pi_0. \tag{2.1.72}$$

进入率(单位时间进入服务机构的顾客数)为

$$\overline{\lambda}=\lambda(1-\pi_N). \tag{2.1.73}$$

平均占用服务台数为

$$K=E(X)-E(X_q)=\frac{\lambda}{\mu}(1-\pi_N)=\frac{\overline{\lambda}}{\mu}. \tag{2.1.74}$$

由利特尔公式平均等待时间与平均逗留时间分别为

$$\begin{aligned}E(W)&=E(X_q)/\overline{\lambda}\\&=\frac{\rho(n\rho)^n\pi_0}{n!(1-\rho)^2\lambda(1-\pi_N)}\\&\quad\cdot[1-(N-n+1)\rho^{N-n}+(N-n)\rho^{N-n+1}],\end{aligned} \tag{2.1.75}$$

$$E(T)=E(X)/\overline{\lambda}=\frac{1}{\mu}+E(W). \tag{2.1.76}$$

现来求进入系统的顾客的等待时间 W 的分布. 当 $t>0$ 时,因为

$$F_w(t)=P\{W<t\}=P\{W=0\}+P\{0<W<t\},$$

又因

$$\begin{aligned}P\{W=0\}&=\sum_{k=0}^{n-1}P\{X=k\mid 顾客进入系统\}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}P\{顾客进入系统\mid X=k\}\pi_k/P\{顾客进入系统\}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\pi_k/(1-\pi_N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{0<W<t\}&=\sum_{k=n}^{N-1}P\{0<W<t\mid X=k,顾客进入系统\}\\&\quad\cdot P\{X=k\mid 顾客进入系统\}\\&=\sum_{k=n}^{N-1}\int_0^t e^{-n\mu x}\frac{(n\mu)^{k-n+1}x^{k-n}}{\Gamma(k-n+1)}dx\cdot\frac{\pi_k}{1-\pi_N},\end{aligned}$$

所以,等待时间 W 的分布函数为

$$F_w(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi_k}{1-\pi_N}+\sum_{k=n}^{N-1}\frac{\pi_k}{1-\pi_N}\int_0^t\frac{(n\mu)^{k-n+1}x^{k-n}}{(k-n)!}e^{-n\mu x}dx, & t>0,\end{cases} \tag{2.1.77}$$

从而 W 的密度函数为

$$f_w(t)=\begin{cases}\delta(t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pi_k}{1-\pi_N}+\sum_{k=n}^{N-1}\frac{\pi_k}{1-\pi_N}\frac{(n\mu)^{k-n+1}t^{k-n}}{(k-n)!} \\ \cdot e^{-n\mu t}, & t>0, \\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases} \tag{2.1.78}$$

2.1.7 $M/M/n/m/m$ 系统($n\leqslant m$)

$M/M/n/m/m$ 系统又叫做 n 个维修工人看管 m 台机器问题. 设有 m 台机器, n 个工人, 机器损坏后如果有工人空闲着, 空闲着的工人中立即有一个来维修, 否则损坏的机器依次排队等待维修. 每台机器正常工作时间 $J\sim\Gamma(1,\lambda)$. 每台损坏的机器维修时间 $B\sim\Gamma(1,\mu)$, 而且各机器在任意时间间隔内工作与维修都是相互独立的. 以 $X(t)$ 表示时刻 t 时不在工作的机器数, 显然 $0\leqslant X(t)\leqslant m$. 因为

$$\begin{aligned}p_{k,k+1}(\Delta t)&\equiv P\{X(t+\Delta t)=k+1\mid X(t)=k\}\\&=C_{m-k}^{1}P\{J\leqslant\Delta t\}[P\{J>\Delta t\}]^{m-k-1}\\&\quad\cdot[P\{B>\Delta t\}]^{\min(k,n)}+o(\Delta t)\\&=C_{m-k}^{1}(1-e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\lambda\Delta t})^{m-k-1}(e^{-\mu\Delta t})^{\min(k,n)}\\&\quad+o(\Delta t)\\&=(m-k)\lambda\Delta t+o(\Delta t),\ k=0,1,\cdots,m,\end{aligned} \tag{2.1.79}$$

$$\begin{aligned}p_{k,k-1}(\Delta t)&\equiv P\{X(t+\Delta t)=k-1\mid X(t)=k\}\\&=[P\{J>\Delta t\}]^{m-k}C_{\min(n,k)}^{1}P\{B\leqslant\Delta t\}\\&\quad\cdot[P\{B>\Delta t\}]^{\min(k,n)-1}+o(\Delta t)\\&=\min(k,n)\mu\Delta t+o(\Delta t),\end{aligned} \tag{2.1.80}$$

又因

$$p_{kj}(\Delta t)\equiv P\{X(t+\Delta t)=j\mid X(t)=k\}=o(\Delta t),\ |j-k|\geqslant 2,$$

所以

$$\begin{aligned}p_{kk}(\Delta t)&\equiv P\{X(t+\Delta t)=k\mid X(t)=k\}\\&=1-(m-k)\lambda\Delta t-\mu_k\Delta t+o(\Delta t),\end{aligned}$$

其中

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & k=0,1,2,\cdots,n-1, \\ n\mu, & k=n,n+1,\cdots,m. \end{cases} \tag{2.1.81}$$

从而知$\{X(t),t\geqslant 0\}$为生灭过程,其生灭率分别为

$$\begin{cases} \lambda_k = (m-k)\lambda, & k=0,1,\cdots,m, \\ \mu_k = \begin{cases} k\mu, & k=0,1,\cdots,n-1, \\ n\mu, & k=n,n+1,\cdots,m. \end{cases} \end{cases} \tag{2.1.82}$$

由(1.5.25)与(1.5.26)式知,系统中有 X 台机器不在工作的分布律为

$$\begin{cases} \pi_k = \begin{cases} C_m^k\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0, & k=0,1,\cdots,n-1 \\ C_m^k\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{k!}{n!n^{k-n}}\pi_0, & k=n,\cdots,m, \end{cases} \\ \pi_0 = \left[\sum\limits_{k=0}^{n} C_m^k\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k + \sum\limits_{k=n+1}^{m} C_m^k\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{k!}{n!n^{k-n}}\right]^{-1}. \end{cases} \tag{2.1.83}$$

平均不在工作的机器数由上式直接计算得不到简洁的表达式.现设 $a,b,E(X_q)$分别表示工作着的、维修着的与排队等待着的平均机器数,则有

$$a+b+E(X_q)=m. \tag{2.1.84}$$

又每台机器平均工作时间为$\dfrac{1}{\lambda}$,平均修理时间为$\dfrac{1}{\mu}$,它们之比应等于 a 与 b 之比,即

$$\frac{a}{b} = \frac{\dfrac{1}{\lambda}}{\dfrac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda}. \tag{2.1.85}$$

又平均修理着的机器数 b 应等于平均工作着的维修工人数 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k\pi_k + n\sum\limits_{k=n}^{m}\pi_k$,即

$$b = \sum_{k=0}^{n-1} k\pi_k + n\sum_{k=n}^{m}\pi_k = n\sum_{k=0}^{m}\pi_k - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k = n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k. \tag{2.1.86}$$

由上三式得

$$E(X_q) = m - a - b = m - b\left(1 + \frac{u}{\lambda}\right)$$

$$= m - \frac{\lambda + u}{\lambda}\left[n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k\right], \qquad (2.1.87)$$

$$E(X) = b + E(X_q) = m - \frac{u}{\lambda}\left[n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k\right], \qquad (2.1.88)$$

$$a = \frac{\mu}{\lambda}b = \frac{u}{\lambda}\left[n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k\right]. \qquad (2.1.89)$$

修理工人的损失系数(损失率)为

$$\frac{n-b}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k. \qquad (2.1.90)$$

类似地可求出修理工人的工作效率$\frac{b}{n}$,机器利用率$\frac{a}{m}$,以及机器的损失系数$\frac{b+E(X_q)}{m}$等.

由于在时刻 t,过程$\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的生率为

$$\lambda_{X(t)} = [m - X(t)]\lambda,$$

所以

$E[\lambda_{X(t)}] = \lambda\{m - E[X(t)]\} \to \lambda[m - E(X)]$,(当 $t \to \infty$ 时)

故系统的进人率(单位时间平均损坏的机器数)为

$$\overline{\lambda} = \lambda[m - E(X)] = \lambda a. \qquad (2.1.91)$$

单位时间平均修复的机器数(修复率)为

$$\overline{u} = \mu b. \qquad (2.1.92)$$

因为在平衡条件下,有 $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$,所以有$\frac{a}{b} = \frac{\mu}{\lambda}$.

由利特尔公式得平均等待修理时间为

$$E(W) = E(X_q)/\overline{\lambda} = \frac{m}{\mu}\left[n - \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\pi_k\right]^{-1} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda\mu}. \qquad (2.1.93)$$

§2.2 瞬时状态的一些结果

瞬时 $M/M/\cdot$ 系统讨论起来非常复杂，而且结果很冗长、复杂，适用价值也不很大. 现仅介绍比较简单的几类系统.

2.2.1 $M/M/\infty$ 系统

由 2.1.4 节知，$M/M/\infty$ 系统的状态过程 $\{X(t)\geqslant 0\}$ 是生灭过程，且生、灭率分别为

$$\lambda_i=\lambda,\quad i=0,1,2,\cdots,$$

$$\mu_i=i\mu,\quad i=0,1,2,\cdots,$$

由(1.5.23)式知，其前进柯氏方程为

$$\begin{cases} p'_j(t)=-(\lambda+ju)p_j(t)+\lambda p_{j-1}(t)+(j+1)\mu p_{j+1}(t),\ j\geqslant 1 \\ p'_0(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

设 $t=0$ 时系统中有 i 个顾客，则方程(2.2.1)有初始条件

$$p_i(0)=1,\quad p_j(0)=0,\quad 当\ j\neq i\ 时. \tag{2.2.2}$$

为解此柯氏方程，我们引进概率母函数(PGF)，记

$$g(t,z)=\sum_{j=0}^{\infty}p_j(t)z^j,\quad |z|\leqslant 1. \tag{2.2.3}$$

称 $g(t,z)$ 为概率分布 $\{p_j(t),j\geqslant 0\}$ 的概率母函数，简记为 PGF. 于是由(2.2.1)式得

$$\frac{\partial g}{\partial t}-(1-z)\mu\frac{\partial g}{\partial z}=-\lambda(1-z)g, \tag{2.2.4}$$

其中 $g=g(t,z)$. 因为 $p_i(0)=1$，所以方程(2.2.4)的初始条件为

$$g(0,z)=z^i. \tag{2.2.5}$$

为解具有初始条件(2.2.5)的方程(2.2.4)，我们考虑方程组：

$$\frac{dt}{1}=-\frac{dz}{(1-z)\mu}=-\frac{dg}{\lambda(1-z)g}, \tag{2.2.6}$$

于是由 $dt=-\dfrac{dz}{(1-z)\mu}$，得 $(1-z)e^{-\mu t}=C_1$. 由 $-\dfrac{dz}{(1-z)\mu}=$

$-\dfrac{dg}{\lambda(1-z)g}$，得 $ge^{-\lambda z/\mu}=C_2$. 所以

$$g(t,z)e^{-\lambda z/\mu}=\phi((1-z)e^{-\mu t}),$$

其中 ϕ 为t,z的任意可微函数. 由初始条件，得

$$z^i e^{-\lambda z/\mu}=\phi(1-z).$$

故

$$(1-x)^i e^{-\lambda(1-x)/\mu}=\phi(x),$$

从而

$$g(t,z)e^{-\lambda z/\mu}=[1-(1-z)e^{-\mu t}]^i\exp\{-\frac{\lambda}{\mu}[1-(1-z)e^{-\mu t}]\}.$$

即

$$g(t,z)=[1-(1-z)e^{-\mu t}]^i\exp\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)(1-e^{-\mu t})\},\tag{2.2.7}$$

因为$[1-(1-z)e^{-\mu t}]^i$ 是随机变量$\xi\sim B(i,e^{-\mu t})$的 PGF，而 $\exp\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)(1-e^{-\mu t})\}$是随机变量 $\eta\sim P(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}))$的 PGF，所以 $g(t,z)$是相互独立的两随机变量 ξ 与 η 之和的 PGF. 从而有

$$\begin{aligned}p_n(t)&=P\{X(t)=n\}=P\{\xi+\eta=n\}\\&=\sum_{k=0}^{\min(i,n)}P\{\xi=k\}P\{\eta=n-k\}\\&=\sum_{k=0}^{\min(i,n)}C_i^k e^{-k\mu t}(1-e^{-\mu t})^{i-k}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right\}\\&\quad\cdot\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^{n-k}}{(n-k)!},\qquad n\geqslant 0.\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

特别，当 $i=0$ 时，有

$$p_n(t)=P\{X(t)=n\}=e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})}\cdot\frac{\left[\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right]^n}{n!},n\geqslant 0,$$

即

$$X(t)\sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right).\tag{2.2.9}$$

所以

$$E[X(t)]=\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}).\qquad(2.2.10)$$

当 $t\to\infty$ 时，$X\sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$. 此与(2.1.59)式一致.

为介绍瞬时状态 $X(t)$ 分布的另一个方法，我们可以考虑更一般的 $M/G/\infty$ 系统. 此系统与 $M/M/\infty$ 系统的唯一区别是每个服务台的服务时间 B 服从一般分布. 设 B 的分布函数为 $H(t)$，$\mu\equiv\frac{1}{E(B)}$. 设

$$X(0)=0,\ \omega(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<y,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}\qquad(2.2.11)$$

则

$$X(t)=\sum_{k=0}^{N(t)}\omega(t-\tau_k,B_k),\qquad(2.2.12)$$

其中 τ_k 为第 k 个顾客到达系统的时刻，B_k 为第 k 个的服务时间，与 B 同分布，$\{N(t),t\geqslant0\}$ 为参数是 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松到达过程.

引理 2.2.1 设 $\{N(t),t\geqslant0\}$ 为参数是 λ 的泊松到达过程，$\{\tau_n,n\geqslant1\}$ 是 $\{N(t),t\geqslant0\}$ 的到达时刻序列，则对 $\forall\ x\in(0,t)$，与整数 $j(1\leqslant j\leqslant n)$ 有

$$P\{\tau_j<x\mid N(t)=n\}=\sum_{k=j}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{t}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}.$$

证

$$P\{\tau_j<x\mid N(t)=n\}=P\{\tau_j\leqslant x,N(t)=n\}/P\{N(t)=n\}$$

$$=P\{N(x)\geqslant j,N(t)=n\}/P\{N(t)=n\}$$

$$=\sum_{k=j}^{n}P\{N(x)=k,N(t)=n\}/P\{N(t)=n\}$$

(由引理 1.3.1)

$$=\sum_{k=j}^{n}e^{-\lambda(t-x)}\frac{[\lambda(t-x)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\Big/\left[e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right]$$

$$=\sum_{k=j}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{t}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}.$$

引理 2.2.2 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 n 个独立同分布随机变量，$\xi_1\sim U(0,t)$，$\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$，为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 的顺序统计量. 则第 j 个顺序统计量 $\xi_{(j)}$ 对任意实数 $x\in(0,t]$，有

$$P\{\xi_{(j)}<x\}=\sum_{k=j}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{t}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k},\quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

证 因为 $\xi_{(1)}\leqslant\xi_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\xi_{(n)}$，所以

$$\begin{aligned}P\{\xi_{(j)}<x\}&=P\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\text{中至少有 } j \text{ 个小于 } x\}\\&=\sum_{k=j}^{n}P\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\text{中恰有 } k \text{ 个小于 } x\}\\&=\sum_{k=j}^{n}C_n^k[P\{\xi_1<x\}]^k[P\{\xi_1\geqslant x\}]^{n-k}\\&=\sum_{k=j}^{n}C_n^k\left(\frac{x}{k}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

证毕.

由上两个引理知，在 $N(t)=n$ 下，在时间区间 $(0,t]$ 中，n 个顾客的到达时刻 $\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n$ 的联合分布与引理 2.2.2 中的顺序统计量 $\xi_{(1)},\xi_{(2)},\cdots,\xi_{(n)}$ 的联合分布相同. 其密度函数都为

$$f_{\xi_{(1)},\cdots,\xi_{(n)}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\dfrac{n!}{t^n}, & 0<t_1<t_2\cdots<t_n<t,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{2.2.13}$$

现在来讨论 $X(t)$ 的分布. 由 (2.2.12) 式与上两个引理以及全数学期望公式，$X(t)$ 的 PGF 为

$$\begin{aligned}G(t,z)\equiv E[Z^{X(t)}]&=\sum_{n=0}^{\infty}E\Big[Z\sum_{k=0}^{N(t)}\omega(t-\tau_k,B_k)\mid N(t)=n\Big]P\{N(t)=n\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E\Big[Z\sum_{k=0}^{n}\omega(t-\xi_k,B_k)\Big]P\{N(t)=n\}.\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

因为在 $N(t)=n$ 下，τ_k 与 $\xi_{(k)}$ 同分布，而 $\xi_{(k)}$ 总是 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 中某一个，且求和变量 k 取遍 $0,1,2,\cdots,n$，故可将 τ_k 换为 ξ_k，又因 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$，独立同分布，所以 $\omega(t-\xi_1,B_1),\omega(t-\xi_2,B_2),\cdots,\omega(t-\xi_n,B_n)$ 独立同分布，并且

$$E\Big[Z\sum_{k=0}^{n}\omega(t-\xi_k,B_k)\Big]=\sum_{m=0}^{n}Z^mP\Big\{\sum_{k=0}^{n}\omega(t-\xi_k,B_k)=m\Big\}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} Z^m C_n^m [P\{0 < t - \xi_k < B_k\}]^m [P\{0 < t - \xi_k \geqslant B_k\}]^{n-m}$$

$$= [ZP\{0 < t - \xi_k < B_k\} + P\{t - \xi_k \geqslant B_k\}]^n, \qquad (2.2.15)$$

而

$$P\{0 < t - \xi_k < B_k\} = \int_0^t P\{0 < t - \xi_k < B_k \mid \xi_k = x\} \frac{1}{t} dx$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t P\{0 < t - x < B_k\} dx = \frac{1}{t}\int_0^t [1 - H(t - x)] dx$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t [1 - H(x)] dx = 1 - \frac{1}{t}\int_0^t H(x) dx.$$

从而

$$P\{B_k \leqslant t - \xi_k\} = \frac{1}{t}\int_0^t H(x) dx.$$

故

$$E\left[Z \sum_{k=0}^{n} \omega(t - \xi_k, B_k)\right] = \left[Z - \frac{z}{t}\int_0^t H(x) dx + \frac{1}{t}\int_0^t H(x) dx\right]^n \qquad (2.2.16)$$

将(2.2.16)式代入(2.2.14)式,得

$$G(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} [Z - \frac{z}{t}\int_0^t H(x) dx + \frac{1}{t}\int_0^t H(x) dx]^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda t} \exp\left\{\lambda t z - \lambda z \int_0^t H(x) dx + \lambda \int_0^t H(x) dx\right\}$$

$$= \exp\left\{-\lambda(1 - z)\int_0^t [1 - H(x)] dx\right\}. \qquad (2.2.17)$$

此是参数为 $\lambda\int_0^t [1 - H(x)] dx$ 的泊松分布随机变量的 PGF. 所以

$$X(t) \sim P\left(\lambda\int_0^t [1 - H(x)] dx\right). \qquad (2.2.18)$$

当 $t \to \infty$ 时,

$$\lambda\int_0^t [1 - H(x)] dx \to \lambda\int_0^\infty [1 - H(x)] dx = \lambda E(B) = \frac{\lambda}{\mu},$$

此示,当 $M/G/\infty$ 系统处于平衡状态后,队长 X 的分布为 $X \sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$. 当 $B \sim \Gamma(1, \mu)$ 时,

因为 $\lambda\int_0^t[1-H(x)]dx=\lambda\int_0^t e^{-\mu x}dx=\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$，所以 $M/M/\infty$ 系统的瞬时队长 $X(t)$ 的分布为 $X(t)\sim P\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)$.

2.2.2 M/M/1 系统

由 2.1.2 节知，$M/M/1$ 系统的状态过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的前进柯氏方程为

$$\begin{cases}p'_j(t)=-(\lambda+\mu)p_j(t)+\lambda p_{j-1}(t)+\mu p_{j+1}(t),j\geqslant 1,\\ p'_0(t)=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t).\end{cases}\tag{2.2.19}$$

因为 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的生灭率分别为 $\lambda_i=\lambda$, $i=0,1,2,\cdots,\mu_i=\mu$, $i=1,2,3,\cdots,\mu_0=0$. 假定 $t=0$ 时系统中有 i 个顾客，即 (2.2.19) 有初始条件：

$$p_i(0)=1,\ p_j(0)=0,\text{当 } j\neq i \text{ 时}.\tag{2.2.20}$$

在初始条件(2.2.20)下，微分差分方程(2.2.19)的解法复杂，有兴趣的读者可参阅徐光辉的书，这里只给出最后结果：

$$\begin{aligned}p_j(t)&\equiv P\{X(t)=j\}\\ &=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{j-i}{2}}e^{-(\lambda+\mu)t}\{I_{j-i}(2t\sqrt{\lambda\mu})+(\frac{\lambda}{\mu})^{-\frac{1}{2}}\\ &\quad\cdot I_{j+i+1}(2t\sqrt{\lambda\mu})+\sum_{k=1}^{\infty}(1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^{-\frac{k+1}{2}}\\ &\quad\cdot I_{j+i+k+1}(2t\sqrt{\lambda\mu})\},\ j\geqslant 0,\end{aligned}\tag{2.2.21}$$

其中 $I_j(y),y\geqslant 0$，是纯虚数贝塞尔(Bessel)函数，它由下列展开式定义：

$$e^{\frac{1}{2}y\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}I_j(y)Z^j.\tag{2.2.22}$$

由上可见，此解既冗长又复杂，对实际应用帮助不大. 关于其它系统，其瞬时队长 $X(t)$ 的分布更复杂. 在很多情况下用近似法得到的解更适合实际的需要.

§2.3 忙　　期

现讨论 $M/M/\cdot$ 系统的忙期.先讨论 $M/M/\cdot$ 系统的平均忙期,然后讨论等待制 $M/M/n$ 系统的 k 阶忙期,最后讨论系统 $M/G/1$ 的忙期的分布.

忙期是指:从系统中开始有顾客时起一直到系统中又没有顾客时止这段时间,一般用 θ 表示忙期的长.繁忙期记为 A,它是指:从系统中所有服务台都进入服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间.k 阶繁忙期是指:从系统中开始有 k 个顾客在等待服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间,并记为 $A_k(k\geqslant 0)$.显然,当系统中只有一个服务台时,繁忙期就是忙期.当系统中有无穷多个服务台时,繁忙期与 k 阶繁忙期均无定义.又零阶繁忙期就是繁忙期.

2.3.1 $M/M/\cdot$ 系统的平均忙期

这里 $M/M/\cdot$ 系统是指:

1) 系统中的服务台个数可以为任意正整数,也可以为无穷.

2) 顾客到达间隔时间序列 $\{J_k,k\geqslant 0\}$ 为相互独立随机变量序列,每个 J_k 都服从指数分布,其参数为系统状态的函数.

3) 所有服务台独立工作且任一服务台为任一顾客的服务时间相互独立同分布,都服从参数为 μ 的指数,且与 $\{J_k,k\geqslant 1\}$ 相互独立.因此,$M/M/\cdot$ 系统包含了§2.1 中的各类系统.

设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为系统的状态过程,由定义 1.5.3 知,该过程是生灭过程,其生率为 $\lambda_i(i=0,1,2,\cdots)$,$\lambda_i>0$,其灭率为 $\mu_i>0$ $(i=1,2,3,\cdots)$,$\mu_0=0$,其中 i 表示系统的状态.即 λ_i,μ_i 都是系统状态的函数.当 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}<\infty$ 时,状态过程的平稳分布存在,且由(1.5.25)与(1.5.26)式给出.

引理 2.3.1　设 α_i 表示系统自状态变为 i 时起一直到下一个

顾客到达时止这段时间，β_i 表示系统的状态自变为 i 时起一直到下一个顾客离开时止这段时间.则

(1) $\alpha_i \sim \Gamma(1,\lambda_i)$，$\beta_i \sim \Gamma(1,\mu_i)$且 α_i 与β_i 独立.

(2) $\min(\alpha_i,\beta_i) \sim \Gamma(1,\lambda_i+\mu_i)$.

证 (1) 由指数分布的无记忆性知，$\alpha_i \sim \Gamma(1,\lambda_i)$，$i \geqslant 0$.因为系统中每个服务台服务时间相互独立同分布，均服从参数为 μ 的指数分布，设系统中有 $n(1 \leqslant n \leqslant \infty)$个服务台，其服务时间分别记为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，则 $B_j \sim \Gamma(1,\mu)$，$j=1,2,\cdots,n$，且有

$$\beta_i = \begin{cases} \min(B_1,B_2,\cdots,B_n), & i \geqslant n, \\ \min(B_1,B_2,\cdots,B_i), & i < n, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

由定理 1.1.5 知，$\beta_i \sim \Gamma(1,\mu_i)$，其中

$$\mu_i = \begin{cases} n\mu, i \geqslant n, \\ i\mu, 0 \leqslant i < n. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

又由假设知 α_i 与β_i 相互独立.

证 (2) 由(1) 立证(2).

引理 2.3.2 设 W_j 为$M/M/\cdot$系统的状态自转移到 j 时起一直到首次转移到状态 0 时止这段时间，记 $\omega_j=E(W_j)$，$j \geqslant 1$.则当 $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i < \infty$ 且$\sup_{j \geqslant 0}\{\lambda_j\} < \infty$ 时，有

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i + \sum_{m=1}^{j-1}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\mu_k}{\lambda_k}\right)\sum_{i=m+1}^{\infty}\rho_i, \quad j \geqslant 1, \tag{2.3.3}$$

其中

$$\rho_1 = \frac{1}{\mu_1}, \rho_i = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}, \quad i \geqslant 2. \tag{2.3.4}$$

证 因为系统从转移到状态 j 时起，经过时间 $\min(\alpha_j,\beta_j)$后，其状态依概率为 1 要发生变化，或者 $j \to j+1$ 或者 $j \to j-1$.又由全数学期望公式和指数分布的性质，得

$$\begin{aligned} \omega_j &= E(W_j) \\ &= E[\min(\alpha_j,\beta_j)] + E[W_j \mid \alpha_j < \beta_j]P\{\alpha_j < B_j\} + E[W_j \mid \alpha_j > \beta_j] \\ &\quad \cdot P\{\alpha_j > \beta_j\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda_j + \mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}\omega_{j+1} + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}\omega_{j-1}, \quad j \geqslant 1,$$

即
$$\omega_{j+1} - \omega_j = -\frac{1}{\lambda_j} + \frac{\mu_j}{\lambda_j}(\omega_j - \omega_{j-1}), \quad j \geqslant 1 \qquad (*)$$

因为 $\omega_0 = 0$,所以,由上式递推得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = -\frac{1}{\lambda_j\rho_j}\sum_{i=1}^{j}\rho_j + \frac{1}{\lambda_j\rho_j}\omega_1. \qquad (2.3.5)$$

因为 $\omega_{j+1} - \omega_j > 0$,所以 $\omega_1 > \sum_{i=1}^{j}\rho_i$. 当 $\sum_{j=1}^{\infty}\rho_i = \infty$ 时,对任意正整数 j 有

$\omega_j \geqslant \omega_1 = \infty$. 当 $\sum_{j=1}^{\infty}\rho_i < \infty$ 时,记

$$Z_n = \omega_{n+1} - \omega_n, \quad n \geqslant 0, \qquad (2.3.6)$$

$$u_n = \frac{z_n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, n \geqslant 1, u_0 = Z_0. \qquad (2.3.7)$$

则由($*$)式有

$$Z_n = -\frac{1}{\lambda} + \frac{\mu_n}{\lambda_n}Z_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \quad Z_0 = \omega_1.$$

从而

$$\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n} + \frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}u_{n-1},$$

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{\lambda_n}\cdot\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = -\rho_n < 0, \quad n \geqslant 1. \ (2.3.8)$$

故 $u_{n-1} > u_n, n \geqslant 1$. 所以 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 存在. 又因 $u_0 - u_n = \sum_{i=1}^{n}\rho_i$,从而

$$\omega_1 = u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n + \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i. \qquad (2.3.9)$$

因为 $u_n = \lambda_n Z_n \rho_n, \sup_{n\geqslant 0}\{\lambda_n\} < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i < \infty$,故 $\lim_{n\to\infty}\rho_n = 0$. 又因系统状态都是正常返的,从而对任意正整数 n,有 $0 < \omega_n < \infty$. 又

$\omega_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} Z_i, Z_j > 0$,故 $\sup_{n\geq 1}\{Z_n\} < \infty$,从而

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n Z_n \rho_n = 0.$$

于是得

$$\omega_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i. \tag{2.3.10}$$

由(2.3.5)式得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = \frac{1}{\lambda_j \rho_j} \sum_{i=j+1}^{\infty} \rho_j = \prod_{k=1}^{j} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \sum_{i=j+1}^{\infty} \rho_i.$$

故

$$\omega_j = \prod_{k=1}^{j-1} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \sum_{i=j}^{\infty} \rho_i + \omega_{j-1},$$

递推立得(2.3.3)式.

定理 2.3.1 对于 $M/M/\cdot$ 系统,当 $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty, \sup_{i\geq 0}\{\lambda_i\} < \infty$ 时,其平均忙期为

$$E(\theta) = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0} - 1\right), \tag{2.3.11}$$

其中 $\pi_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k}\right]^{-1}$ 为系统 $M/M/\cdot$ 的平稳概率:$P\{X=0\}$.

证 因为 $E(\theta) = \omega_1$,所以由 (2.3.10) 式得

$$E(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}$$
$$= \frac{1}{\lambda_0}\left[\frac{1}{\pi_0} - 1\right].$$

定理 2.3.2 对具有 $n(n \geq 1)$ 个服务台的等待制系统,当 $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$ 时,其平均繁忙期为

$$E(A) = \frac{1}{\mu_n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{n+i-1}}{\mu_n \mu_{n+1} \cdots \mu_{n+i}}, \quad 1 \leq n \leq \infty. \tag{2.3.12}$$

证 因为 $E(A)=\omega_n-\omega_{n-1}$，所以由(2.3.3)式立得(2.3.12)式.

定理 2.3.3 $M/M/\cdot$系统的平均操作周期(即系统自转移到状态 0 时起一直到下一次又转移到状态 0 时止这段时间的数学期望)为

$$E(I+\theta)=\frac{1}{\lambda_0\pi_0}, \qquad (2.3.13)$$

其中 I 称为系统的闲期.

证 因为系统转移到状态 0 时，经 α_0 时间后必转移到状态 1，由状态 1 经 W_1 时间后又回到状态 0，所以 $I=\alpha_0$. 从而

$$E(I+\theta)=E(\alpha_0+W_1)=\frac{1}{\lambda_0}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right)=\frac{1}{\lambda_0\pi_0}.$$

例如

(1) 对于损失制 $M/M/n/n$ 系统，因为

$\lambda_i=\lambda, i=0,1,2,\cdots, \mu_i=i\mu, i=0,1,\cdots,n, \pi_0=\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$，所以

$$E(\theta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j,$$

$$E(A)=\frac{1}{\mu_n}=\frac{1}{n\mu},$$

$$E(I+\theta)=\frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j.$$

(2) 对于 $M/M/\infty$ 系统，因为 $\lambda_i=\lambda, i=0,1,2,\cdots, \mu_i=i\mu, i=0,1,2,\cdots, \pi_0=e^{-\lambda/\mu}$，所以 $E(\theta)=\frac{1}{\lambda}(e^{\lambda/\mu}-1)$，$E(I+\theta)=\frac{1}{\lambda}e^{\lambda/\mu}$.

(3) 对于等待制(FCFS)$M/M/n$ 系统，因为 $\lambda_i=\lambda, i\geqslant 0$，

$$\mu_i=\begin{cases} i\mu, & i=0,1,\cdots,n-1, \\ n\mu, & i=n,n+1,\cdots, \end{cases}$$

$$\pi_0=\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!}+\frac{(n\rho)^n}{n!\ (1-\rho)}\right]^{-1},\quad \rho=\frac{\lambda}{n\mu}<1,$$

所以

$$E(\theta)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!}+\frac{(n\rho)^n}{n!\ (1-\rho)}\right],\quad E(A)=\frac{1}{n\mu-\lambda},$$

$$E(I+\theta)=\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!}+\frac{(n\rho)^n}{n!\ (1-\rho)}\right]\frac{1}{\lambda},$$

特别，当 $n=1$ 时 $E(\theta)=E(A)=\frac{1}{\mu-\lambda}$，$E(I+\theta)=\frac{\mu}{\lambda(\mu-\lambda)}$.

(4) 对于混合制 $M/M/n/N(N\geqslant n)$系统，因为

$$\lambda_i=\lambda,\ i=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$\mu_i=\begin{cases}i\mu,\ i=0,1,\cdots,n-1,\\ n\mu,\ i=n,n+1,\cdots,N,\end{cases}$$

$$\pi_0=\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!}+\sum_{j=n}^{N}\frac{(n\rho)^j}{n!n^{j-n}}\right]^{-1},$$

所以

$$E(\theta)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!}+\sum_{j=n}^{N}\frac{(n\rho)^j}{n!n^{j-n}}\right]^{-1},$$

$$E(A)=(1-\rho^{N+1-n})/[n\mu(1-\rho)],\rho=\frac{\lambda}{n\mu},$$

$$E(I+\theta)=\frac{1}{\lambda}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n\rho)^j}{j!}+\sum_{j=n}^{N}\frac{(n\rho)^j}{n!n^{j-n}}\right].$$

(5) 对于 $M/M/n/m/m(m\geqslant n)$系统，因为

$$\lambda_i=(m-i)\lambda,i=0,1,2,\cdots,m-1,$$

$$\mu_i=\begin{cases}i\mu,\ i=0,1,\cdots,n-1,\\ n\mu,\ i=n,n+1,\cdots,m\end{cases}$$

$$\pi_0=\left[\sum_{j=0}^{n}C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j+\sum_{j=n+1}^{m}C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{j!}{n!n^{j-n}}\right]^{-1},$$

所以

$$E(\theta)=\frac{1}{m\lambda}\left[\sum_{j=1}^{n}C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j+\sum_{j=n+1}^{m}C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{j!}{n!n^{j-n}}\right],$$

$$E(A)=\frac{1}{n\mu}+\sum_{j=0}^{m-n}P_{m-n}^j\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j,$$

$$E(I+\theta)=\frac{1}{m\lambda}\left[\sum_{j=1}^{n}C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j+\sum_{j=n+1}^{m}C_m^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{j!}{n!n^{j-n}}\right].$$

2.3.2 $M/G/1$ 系统的忙期

为了讨论 $M/M/1$ 系统的忙期，我们先来讨论更一般的 $M/G/1$ 系统的忙期. $M/G/1$ 系统与 $M/M/1$ 系统的区别是服务是时间 B 服从一般分布. 设 $E(B)=\frac{1}{\mu}$, $D(B)=\sigma^2$ 均存在，$H(t)$ 为 B 的分布函数.

设 $M/G/1$ 系统的忙期为 θ, B 为一顾客的服务时间，$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的泊松输入(到达)过程. $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ 为相互独立且均与 θ 同分布的随机变量，$\theta^*(s)$, $B^*(s)$ 分别为 θ, B 的拉普拉斯－司蒂阶(Laplace-Stieltjes) 变换(LST). 由于忙期与服务次序无关，当系统开始有一个顾客时，服务台立刻为该顾客服务，忙期也就开始，在为该顾客服务时间 B 中系统将到达 $N(B)$ 多个顾客，每一个顾客都引出(产生)一个忙期，故有

$$\theta=B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}. \tag{2.3.14}$$

由全期望公式，得

$$\begin{aligned}
\theta^*(s)&\equiv E(e^{-s\theta}) \qquad [R_e(s)>0]\\
&=\int_0^\infty E(e^{-s\theta}\mid B=t)dH(t)\\
&=\int_0^\infty E(e^{-st+s\theta_1+\cdots+s\theta_{N(t)}}]dH(t)\\
&=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}E[e^{-s\sum_{i=1}^{N(t)}\theta_i}\mid N(t)=n]P\{N(t)=n\}dH(t)\\
&=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}E[e^{-s\sum_{i=1}^{n}\theta_i}]P\{N(t)=n\}dH(t)\\
&=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=0}^{\infty}[\theta^*(s)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dH(t)\\
&=\int_0^\infty e^{-[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]t}dH(t)\\
&=B^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)].
\end{aligned}$$

即

$$\theta^*(s) = B^*[s + \lambda - \lambda\theta^*(s)]. \qquad (2.3.15)$$

设 $Z = \theta^*(s)$ 则(2.3.15)变为

$$Z = B^*[s + \lambda - \lambda Z]. \qquad (2.3.16)$$

现证明上方程在单位圆 $|Z| = 1$ 内有惟一解.为此先介绍如下两个定理.

儒歇定理 设 $f(Z)$ 与 $g(Z)$ 在一个 Z 复平面的闭曲线 C 上和内部是解析的.如果在 C 上 $|g(Z)| < |f(Z)|$,则在 C 内,$f(Z)$ 与 $f(Z) + g(Z)$ 零点数(根数)相同.

拉格朗日定理 设 $f(Z)$ 和 $g(Z)$ 在包围一点 a 的闭曲线 C 上和内部是解析的,且在 C 上所有点 Z,ω 满足不等式

$$|\omega g(Z)| < |z - a|. \qquad (2.3.17)$$

则方程

$$z = a + \omega g(Z) \qquad (2.3.18)$$

在 C 内关于 Z 恰有一个根,且 $f(Z)$ 能被展开成 ω 的幂级数:

$$f(Z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ \frac{df(z)}{dz}[g(z)]^n \right\} \bigg|_{z=a}. \qquad (2.3.19)$$

现证方程(2.3.16)在单位圆 $|Z| = 1$ 内有惟一解.因为在 $|Z| = 1 + \varepsilon$ 上,

$$|B^*[s + \lambda - \lambda Z]| \leqslant 1 < |Z| + \varepsilon, \varepsilon > 0$$

由儒歇定理知,Z 与 $Z - B^*[s + \lambda - \lambda Z]$ 在 $|Z| = 1 + \varepsilon$ 内零点数相同,都是1.现设 $a = 0, \omega = 1, g(z) = B^*[s + \lambda - \lambda Z]$,$f(z) = z$.由拉格朗日定理,得

$$\theta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{[B^*(s + \lambda - \lambda Z)]^n\} \bigg|_{z=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [B^*(s + \lambda)]^n. \qquad (2.3.20)$$

记 $D_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$,其中 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 相互独立且均与 B 同分布.则

$$[B^*(s + \lambda)]^n = \{E[e^{-(s+\lambda)B}]\}^n = E[e^{-(s+\lambda)D_n}].$$

故

$$\theta^*(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{n-1}}{n!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)x}dP\{D_n<x\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\int_0^{\infty}x^{n-1}e^{-(s+\lambda)x}dP\{D_n<x\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(s+\lambda)x}\frac{(\lambda x)^{n-1}}{n!}dP\{D_n<x\}. \qquad (2.3.21)$$

由反演公式得

$$P\{\theta<x\}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{x}e^{-\lambda y}\frac{(\lambda y)^{n-1}}{n!}dP\{D_n<y\}. \qquad (2.3.22)$$

因为

$\theta^{*\prime}(0)=-E(\theta),\theta^{*\prime\prime}(0)=E(\theta^2),B^{*\prime}(0)=-E(B),B^{*\prime\prime}(0)=E(B^2)$,

所以,由(2.3.15)式得

$$E(\theta)=\frac{1}{\mu-\lambda},D(\theta)=\frac{\mu^3\sigma^2+\lambda}{(\mu-\lambda)^3},\lambda<\mu \qquad (2.3.23)$$

或因

$$E[N(B)]=\int_0^{\infty}E[N(B)\mid B=t]dH(t)=\int_0^{\infty}E[N(t)]dH(t)$$

$$=\int_0^{\infty}\lambda t dH(t)=\lambda E(B)=\frac{\lambda}{\mu}\equiv\rho, \qquad (2.3.24)$$

$$E[N^2(B)]=\int_0^{\infty}E[N^2(t)]dH(t)=\int_0^{\infty}(\lambda t+\lambda^2t^2)dH(t)$$

$$=\frac{\lambda}{\mu}+\lambda^2E(B^2)=\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda^2}{\mu^2}+\lambda^2\sigma^2, \qquad (2.3.25)$$

由(2.3.14)式,得 $E(\theta)=\frac{1}{\mu}+E(\theta)E[N(B)]$,即

$$E(\theta)=\frac{1}{\mu\left[1-\frac{\lambda}{\mu}\right]}=\frac{1}{\mu-\lambda}. \qquad (2.3.26)$$

又 $D(\theta)=D(B)+D\left[\sum_{i=1}^{N(B)}\theta_i\right]+2\mathrm{cov}(B,\sum_{i=1}^{N(B)}\theta_i)$

$$=\sigma^2+E[N(B)]D(\theta)+D[N(B)][E(\theta)]^2$$

$$+ 2E\left[B\sum_{i=1}^{N(B)}\theta_i\right] - 2E(B)E\left[\sum_{i=1}^{N(B)}\theta_i\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{\lambda}{\mu}D(\theta) + (\rho + \lambda^2\sigma^2)\frac{1}{(\mu-\lambda)^2} + \frac{2\rho E(B^2)}{1-\rho}$$

$$- \frac{2}{\mu}\cdot\frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{1}{1-\rho}\left[\frac{\mu^2\sigma^2+\rho}{(\mu-\lambda)^2}\right] = \frac{\mu^3\sigma^2+\lambda}{(\mu-\lambda)^3}, \qquad (2.3.27)$$

$E(\theta)$,$D(\theta)$ 与(2.3.23)式一致.

现讨论 $M/G/1$ 系统一个忙期 θ 中服务完的顾客数(记为 M)的分布.类似于(2.3.14)式,有

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(B)}, \qquad (2.3.28)$$

其中 M_i 表示在 θ_i 中服务完的顾客数.易见 $M_1, M_2, M_3, \cdots$ 相互独立,且均与 M 同分布.现来求 M 的PGF$M(Z)$.由(2.3.28)式得

$$M(z) = E(Z^M) = E[Z^{1+M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}}]$$

$$= Z\int_0^\infty E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}} \mid B = t]dH(t)$$

$$= Z\int_0^\infty E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(t)}}]dH(t)$$

$$= Z\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_n}]P\{N(t) = n\}dH(t)$$

$$= Z\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty [M(z)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dH(t)$$

$$= Z\int_0^\infty e^{-\lambda t[1-M(z)]}dH(t)$$

$$= ZB^*[\lambda - \lambda M(Z)]. \qquad (2.3.29)$$

由于 $M'(1) = E(M)$,$M''(1) = E(M^2) - E(M)$,由(2.3.29)式得

$$E(M) = \frac{1}{1-\rho}, D(M) = \frac{\rho+\lambda^2\sigma^2}{(1-\rho)^3},\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \qquad (2.3.30)$$

或由(2.3.28)式也可求得 $E(M)$ 与 $D(M)$.

2.3.3 $M/M/n$ 系统的 $k(k \geqslant 0)$ 阶繁忙期

$M/M/n$ 系统如 2.1.1 节所设.

定理 2.3.4 设 A_0 为 $M/M/n$ 系统的 0 阶繁忙期. 则 A_0 的 LST 为

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + \lambda + s - \lambda A_0^*(s)}, \quad \lambda < n\mu \quad (2.3.31)$$

且

$$E(A_0) = \frac{1}{n\mu - \lambda}, \ D(A_0) = \frac{n\mu + \lambda}{(n\mu - \lambda)^3}, \quad \lambda < n\mu. \quad (2.3.32)$$

证 由于 n 个服务台独立工作,每个服务台的服务时间相互独立且都服从参数为 μ 的指数分布,所以当 n 个服务台都进入服务时,这 n 个服务台可以看成服务时间为 $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{B_i\}$ 的一个服务台,其中 B_i 表示第 i 个服务台的服务时间. 由指数分布的性质知, $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{B_i\} \sim \Gamma(1, n\mu)$. 这样, 当 n 个服务台都进入服务后, $M/M/n$ 系统可以看成 $M/M/1$ 系统. A_0 可以看成 $M/M/1$ 系统中的 θ,由(2.3.15)与(2.3.23)立得(2.3.31)与(2.3.32)式.

定理 2.3.5 设 A_k 为 $M/M/n$ 系统的 k 阶繁忙期,则 A_k 的 LST 为

$$A_k^*(s) = [A_0^*(s)]^{k+1}, k = 0, 1, 2, \cdots, \quad (2.3.33)$$

其中 $A_0^*(s)$ 由(2.3.31)式给出. 且

$$E(A_k) = \frac{k+1}{n\mu - \lambda}, D(A_k) = \frac{(k+1)(n\mu + \lambda)}{(n\mu - \lambda)^3}, \quad \lambda < n\mu. \quad (2.3.34)$$

证 因为

$$A_k = A_{00} + A_{01} + \cdots + A_{0k}, \quad (2.3.35)$$

其中 A_{0j} 表示从 $M/M/n$ 系统中第一次有 j 个顾客在等待服务时起一直到第一次有 $j-1$ 个顾客在等待服务时止这段时间 $j = 0, 1, 2, \cdots, k$. 这里 -1 个顾客在等待服务理解为 n 个服务台中有一

个空闲.由假设与指数分布的性质知,$A_{00},A_{01},\cdots,A_{0k}$ 相互独立且均与 A_0 同分布,故

$$A_k^*(s)=E[e^{-sA_k}]=[A_0^*(s)]^{k+1}.$$

由此式可得(2.3.34)式.

定理2.3.6 对于 $M/M/n$ 系统,记在一个 A_k 中服务完的顾客数为 $M_k(k\geqslant 0)$,则

$$E(M_k)=\frac{n\mu(k+1)}{n\mu-\lambda},$$

$$D(M_k)=\frac{(k+1)(2n^3\mu^3+n\mu\lambda^2-n^2\lambda\mu^2)}{(n\mu-\lambda)^3},\lambda<n\mu. \quad (2.3.36)$$

证 由(2.3.30)式知.在一个 A_0 中服务完的平均顾客数为 $\frac{n\mu}{n\mu-\lambda}$,方差为 $\frac{2(n\mu)^3+n\mu\lambda^2-(n\mu)^2\lambda}{(n\mu-\lambda)^3}$.再由(2.3.35)式立得本定理结论.

§2.4 $E_r/M/1$ 系统

作为 $M/M/1$ 系统的推广.现来考虑 $E_r/M/1$ 系统.在该系统中到达间隔时间序列 $\{J_k,k\geqslant 1\}$ 为 i.i.d 随机变量序列,$J_1\sim\Gamma(r,\lambda)$,r 为正整数.服务时间序列 $\{B_k,k\geqslant 1\}$ 也为 i.i.d 随机变量序列,$B_1\sim\Gamma(1,\mu)$,且 $\{J_k,k\geqslant 1\}$ 与 $\{B_k,k\geqslant 1\}$ 相互独立.服务机构只有一个服务台.

2.4.1 队长的分布

因为 J_1 是 r 个相互独立同服从参数为 λ 的指数分布的随机变量之和,所以每个顾客必须经过 r 个阶段(称为相位)才能到达系统.通过每个相位的时间都服从参数为 λ 的指数分布,且相互独立.且当前一个顾客通过 r 个相位进入系统后,才允许下一个顾客向第一个相位前进.如果把顾客通过的相位数作为系统的状态,且服务完一个顾客系统就减少了 r 个相位.顾客前进一个相位,系统就增加了一个相位,则系统的相位就是一个齐次马尔可夫链.即设

$Y(t)$ 表示时刻 t 时系统中的相位数,则 $\{Y(t), t \geqslant 0\}$ 是一个齐次马尔可夫链.这是因为由(1.3.8)—(1.3.10)式,有

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i+1 \mid Y(t) = i\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } lr+1 \text{ 个相位且服务了 } l \text{ 个顾客}\} \\
&= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了一个相位且服务了 } 0 \text{ 个顾客}\} + o(\Delta t) \\
&= (1 - e^{-\lambda \Delta t}) e^{-\mu \Delta t} + o(\Delta t) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t), i \geqslant 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{s,i-r}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i-r \mid Y(t) = i\} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } lr \text{ 个相位且服务了 } l+1 \text{ 个顾客}\} \\
&= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } 0 \text{ 个相位且服务了 } 1 \text{ 个顾客}\} + o(\Delta t) \\
&= (1 - e^{-\mu \Delta t}) e^{-\lambda \Delta t} + o(\Delta t) \\
&= \mu \Delta t + o(\Delta t), i \geqslant r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{ii}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i \mid Y(t) = i\} \\
&= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } 0 \text{ 个相位且服务了 } 0 \text{ 个顾客}\} + o(\Delta t) \\
&= e^{-\lambda \Delta t} e^{-\mu \Delta t} + o(\Delta t) \\
&= 1 - (\lambda + \mu) \Delta t + o(\Delta t), i \geqslant r,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{ii}(\Delta t) &\equiv P\{Y(t+\Delta t) = i \mid Y(t) = i\} \\
&= P\{\text{在 } \Delta t \text{ 内增加了 } 0 \text{ 个相位}\} + o(\Delta t) \\
&= e^{-\lambda \Delta t} + o(\Delta t) \\
&= 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t), i < r,
\end{aligned}$$

其他,$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t)$,从而齐次马氏链的 Q 矩阵(密度矩阵)中的元素为

$$\begin{cases} q_{i,i+1} = \lambda, & i \geqslant 0, \\ q_{ii} = -(\lambda + \mu), & i \geqslant r, \\ q_{ii} = -\lambda, & i < r, \\ q_{i,i-r} = \mu, & i \geqslant r, \\ q_{ij} = 0, \text{其他}. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

由平稳方程 $\pi Q = 0$,其中 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$,得

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_r, \\ \lambda\pi_j = \lambda\pi_{j-1} + \mu\pi_{j+r}, & 1 \leqslant j \leqslant r-1, \\ (\lambda + \mu)\pi_j = \lambda\pi_{j-1} + \mu\pi_{j+r}, & j \geqslant r. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

设

$$\pi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j, \tag{2.4.3}$$

则得

$$(\lambda + \mu)\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z^j - \mu\sum_{j=1}^{r-1} \pi_j z^j = \lambda\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j-1} z^j + \mu\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{j+r} z^j, \tag{2.4.4}$$

即

$$(\lambda + \mu)[\pi(z) - \pi_0] - \mu\sum_{j=1}^{r-1} \pi_j z^j$$
$$= \lambda z\pi(z) + \frac{\mu}{z^r}\Big[\pi(z) - \sum_{j=0}^{r} \pi_j z^j\Big].$$

注意到 $\lambda\pi_0 = \mu\pi_r$ 上式变为

$$\pi(z)z^r(\lambda + \mu) - \mu z^r\sum_{j=1}^{r-1} \pi_j z^j = \lambda z^{r+1}\pi(z) + \mu\pi(z) - \mu\sum_{j=0}^{r-1} \pi_j z^j.$$

从而

$$\pi(z) = (1 - z^r)\sum_{j=0}^{r-1} \pi_j z^j / [1 + \rho z^{r+1} - (1 + \rho)z^r], \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{2.4.5}$$

$\rho < 1$ 是系统的平稳条件.在 $\rho < 1$ 下,现证(2.4.5)式的分母在单位圆 $|z| = 1$ 外有惟一的零点.设 $u = \dfrac{1}{z}$,则有

$$1+\rho z^{r+1}-(1-\rho)z^{r}=\frac{1}{u^{r+1}}[u^{r+1}+\rho-(1+\rho)u].$$

令

$$f(u)=-(1+\rho)u, g(u)=\rho+u^{r+1}.$$

显然 $f(u)$ 有惟一的零点 $u=0$. 对满足:$0<\delta<1$ 的任意 δ,在圆 $|u|=1-\delta$ 上有

$$\begin{aligned}|g(u)|\leqslant\rho+(1-\delta)^{r+1}&=\rho+[1-(r+1)\delta]+o(\delta)\\&=1+\rho-(r+1)\delta+o(\delta),\end{aligned}$$

$$|f(u)|=(1+\rho)(1-\delta)=(1+\rho)-(1+\rho)\delta.$$

从而 $|g(u)|<|f(u)|$. 由儒歇定理知,$f(u)+g(u)$ 在 $|u|=1-\delta$ 内有惟一的零点,又由于 δ 的任意性知,$f(u)+g(u)$ 在 $|u|=1$ 内有惟一的零点,从而 $1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^{r}$ 在单位圆外有惟一的零点. 记其零点为 $z_0=\dfrac{1}{u_0}$,又 $z=1$ 是 $1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^{r}$ 的一个零点,而其它 $r-1$ 个零点都在单位圆内. 又因当 $|z|\leqslant1$ 时,母函数 $\pi(z)$ 收敛,所以当 $|z|\leqslant1$ 时 $\pi(z)$ 解析,从而(2.4.5) 式分子与分母在 $|z|\leqslant1$ 内有相同的根. 又因 $1-z^{r}$ 的零点都在单位圆上,所以$\dfrac{1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^{r}}{(z-1)(z-z_0)}$ 与 $\sum\limits_{j=0}^{r-1}\pi_j z^j$ 在单位圆内有相同的 $r-1$ 个零点(根),即

$$\frac{1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^{r}}{(z-1)(z-z_0)}=C\sum_{j=0}^{r-1}\pi_j z^j, \tag{2.4.6}$$

其中 C 为一个常数. 将(2.4.6) 式代入(2.4.5) 式得

$$\pi(z)=\frac{1-z^{r}}{c(z-1)(z-z_0)}. \tag{2.4.7}$$

令 $z=1$,因为 $\pi(1)=1$,得

$$C=-\frac{r}{1-z_0}. \tag{2.4.8}$$

从而

$$\pi(z)=\frac{(1-z_0)(1-z^{r})}{r(1-z)(z-z_0)}=\frac{(1-z^{r})(1-1/z_0)}{r(1-z)(1-z/z_0)}$$

$$= \frac{1-z^r}{r}\left[\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z_0}\frac{1}{(1-z/z_0)}\right]$$

$$= \frac{1-z^r}{r}\left[\sum_{j=0}^{\infty} z^j - \frac{1}{z_0}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_0}\right)^j\right]$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_0^{j+1}}\right)z^j - \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z_0^{j+1}}\right)z^{j+r}. \quad (2.4.9)$$

故得

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{z_0^{j+1}}\right), & 0 \leqslant j \leqslant r-1, \\ \frac{1}{rz_0^{j-r+1}}\left(1-\frac{1}{z_0^r}\right), & j \geqslant r. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

因为$1+\rho z_0^{r+1}-(1+\rho)z_0^r = 0$，即 $z_0^r - 1 = \rho z_0^r(z_0-1)$，所以$1-\frac{1}{z_0^r} = \rho z_0^r(z_0-1)$，从而(2.4.10)式变为

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{z_0^{j+1}}\right), & 0 \leqslant j < r, \\ \frac{\rho(z_0-1)}{rz_0^{j-r+1}}, & j \geqslant r. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

现考虑 $E_r/M/1$ 系统队长的平稳分布. 设 p_n 为系统中有 n 个顾客的概率. 因为当系统中有 n 个顾客时，系统中的相位为 nr—$nr+r-1$，所以

$$p_n = \sum_{j=nr}^{(n+1)r-1}\pi_j = \frac{\rho(z_0^r-1)}{rz_0^{nr}}, \quad n = 1,2,3\cdots. \quad (2.4.12)$$

因为$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho(z_0^r-1)}{rz_0^{nr}} = \frac{\rho}{r}, \quad (2.4.13)$$

所以 $p_0 = 1-\frac{\rho}{r}$，从而

$$p_n = \begin{cases} 1-\frac{\rho}{r}, & n = 0, \\ \frac{\rho(z_0^r-1)}{rz_0^{nr}}, & n = 1,2,3,\cdots, \end{cases} \quad (2.4.14)$$

由(2.4.14)式，得平均队长与平均等待队长分别为

$$E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=\sum_{n=0}^{\infty}n\frac{\rho(z_0^r-1)}{rz_0^{nr}}=\frac{\rho z_0^r}{r(z_0^r-1)},\qquad(2.4.15)$$

$$E(X_q)=E(X)-\frac{\rho}{r}=\frac{\rho}{r(z_0^r-1)}.\qquad(2.4.16)$$

2.4.2 等待时间的分布

现考虑 FCFS $E_r/M/1$ 系统中一顾客等待时间 W 的分布. 因为当一顾客到达系统时，系统中相位数可能是 $r,2r,3r,\cdots$，故顾客到达时的概率为

$$P\{\text{顾客到达系统}\}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{(n+1)r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho(z_0-1)}{rz_0^{nr+1}}=\frac{\rho(z_0-1)z_0^{r-1}}{r(z_0^r-1)},\qquad(2.4.17)$$

所以，$P\{$系统已有 n 个顾客 $|$ 顾客到达系统$\}$

$$=\frac{\pi_{(n+1)r}}{P\{\text{顾客到达系统}\}}=\frac{\rho(z_0-1)}{rz_0^{nr+1}}\Bigg/\frac{\rho(z_0-1)z_0^{r-1}}{r(z_0^r-1)}$$

$$=(z_0^r-1)/z_0^{(n+1)r},\quad n\geqslant 0.\qquad(2.4.18)$$

从而

$$p\{\text{系统没有顾客}\mid\text{顾客到达系统}\}=\frac{z_0^r-1}{z_0^r}.\qquad(2.4.19)$$

故到达系统的顾客等待时间 W 的分布函数为：当 $t>0$ 时

$$F_W(t)=P\{W<t\}=P\{W=0\}+P\{0<W<t\}$$

$$=\frac{z_0^r-1}{z_0^r}+\sum_{n=1}^{\infty}P\{0<W<t\mid\text{到达时系统中有 }n\text{ 个顾客}\}\cdot\frac{z_0^r-1}{z_0^{(n+1)r}}$$

$$=\frac{z_0^r-1}{z_0^r}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\frac{\mu^nx^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu x}dx\,\frac{z_0^r-1}{z_0^{(n+1)r}}$$

$$=\frac{z_0^r-1}{z_0^r}+\int_0^t\frac{\mu(z_0^r-1)}{z_0^{2r}}e^{-\mu x(1-z^{-r})}dx$$

$$= 1 - z_0^{-r} e^{-\mu t(1-z_0^{-r})}. \tag{2.4.20}$$

从而，W 的密度函数为

$$f_w(t) = \begin{cases} (1 - z_0^{-r})\delta(t) + \mu z_0^{-r}(1 - z_0^{-r}) e^{-\mu t(1-z_0^{-r})}, & t > 0, \\ 0, & t \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.4.21}$$

所以

$$E(W) = \frac{1}{\mu(z_0^r - 1)}, \tag{2.4.22}$$

$$E(W^2) = \frac{2z_0^r}{\mu^2(z_0^r - 1)}, D(W) = \frac{2z_0^r - 1}{\mu^2(z_0^r - 1)^2}. \tag{2.4.23}$$

2.4.3 忙　期

设 θ 为系统的忙期，$X(t)$ 为在时间区间 $(0,t]$ 中到达系统的顾客数，$N(t)$ 为在时间区间 $(0,t]$ 中系统增加的相位数，则由假设知 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的泊松过程，在一个服务时间 B 中有 n 个顾客到达系统的概率为

$$P\{X(B) = n\} = P\{nr \leqslant N(B) \leqslant (n+1)r - 1\} = \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} P\{N(B) = k\}$$

$$= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \int_0^\infty p\{N(B) = k \mid B = t\} \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} \frac{\mu \lambda^k t^k}{k!} dt$$

$$= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \frac{\mu \lambda^k}{k!(\lambda + \mu)^{k+1}} \int_0^\infty x^k e^{-x} dx$$

$$= \sum_{k=nr}^{(n+1)r-1} \frac{\mu \lambda^k}{(\lambda + \mu)^{k+1}} = [1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r][\frac{\lambda}{\lambda + \mu}]^{nr},$$

即

$$P\{X(B) = n\} = [1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r][\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r]^n, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2.4.24}$$

所以

$$E[X(B)] = \frac{\lambda^r}{(\lambda+\mu)^r-\lambda^r}, \quad D[X(B)] = \frac{\lambda^r(\lambda+\mu)^r}{[(\lambda+\mu)^r-\lambda^r]^2}. \tag{2.4.25}$$

由于忙期与顾客的服务顺序无关,因此有

$$\theta = B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots \theta_{X(B)}, \tag{2.4.26}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ 为相互独立同分布随机变量,且均与 θ 同分布. 由全期望公式,θ 的 LST 为

$$\begin{aligned}
\theta^*(s) &= E(e^{-s\theta}) = E\{e^{-s[B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{X(B)}]}\} \\
&= \int_0^\infty E\{e^{-s[t+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{X(t)}]}\}\mu e^{-\mu t}dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty E\{e^{-s[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n]}\}P\{X(t)=n\}\mu e^{-(\mu+s)t}dt \\
&= \int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu+s)t}\sum_{n=0}^\infty[\theta^*(s)]^n\sum_{k=nr}^{(n+1)r-1}\frac{\lambda^k t^k}{k!}dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty[\theta^*(s)]^n\sum_{k=nr}^{(n+1)r-1}\frac{\mu\lambda^k}{k!}\cdot\frac{\Gamma(k+1)}{(\lambda+\mu+s)^{k+1}} \\
&= \sum_{n=0}^\infty[\theta^*(s)]^n\frac{\mu}{\mu+s}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right)^r\right]\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu+s}\right]^{nr} \\
&= \frac{\mu[(\lambda+\mu+s)^r-\lambda^r]}{(\mu+s)[(\lambda+\mu+s)^r-\lambda^r\theta^*(s)]}.
\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

从而

$$E(\theta) = \frac{(\lambda+\mu)^r-\lambda^r}{\mu[(\lambda+\mu)^r-2\lambda^r]}, \tag{2.4.28}$$

$$D(\theta) = \frac{2rq^r}{\mu(\lambda+\mu)(1-2q^r)^2}+\frac{(1-q^r)(1-3q^r+4q^{2r})}{\mu^2(1-2q^r)^3}, \tag{2.4.29}$$

其中

$$q = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

当 $r=1$ 时,$E_r/M/1$ 系统就变为 $M/M/1$ 系统,$X(t)=N(t)$ 且

$$E[X(B)] = \frac{\lambda}{\mu}, \theta^*(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s - \lambda\theta^*(s)},$$

$$E(\theta) = \left| \frac{1}{\mu - \lambda}, D(\theta) \right| = \frac{\lambda + \mu}{(\mu - \lambda)^3}, \quad \lambda < \mu.$$

现讨论在一个忙期中服务完的顾客数 M 的分布.设 $M_1, M_2, M_3, \cdots$ 相互独立且均与 M 同分布.因为

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{X(B)}, \qquad (2.4.30)$$

故 M 的 PGF 为

$$\begin{aligned} M(z) \equiv E(z^M) &= ZE[Z^{M_1 + M_2 + \cdots + M_{X(B)}}] \\ &= Z\sum_{n=0}^{\infty}[M(Z)]^n\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r\right]\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r\right]^n \\ &= Z\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^r\right]\frac{(\lambda + \mu)^r}{(\lambda + \mu)^r - \lambda^r M(Z)} \\ &= Z[1 - q^r]\frac{1}{1 - q^r M(Z)}, q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \qquad (2.4.31)$$

由(2.4.31)或(2.4.30)式得

$$E(M) = \frac{1 - q^r}{1 - 2q^r}, \quad 0 < q < 1, \qquad (2.4.32)$$

$$D(M) = \frac{(1 - q^r)q^r}{(1 - 2q^r)^3}, \quad 0 < q < 1, \qquad (2.4.33)$$

其中

$$q = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

§2.5 批服务的 $M/M^r/1$ 系统

2.5.1 $M/M^r/1$ 系统

$M/M^r/1$ 系统与 $M/M/1$ 系统的区别是每次服务台不是服务一个顾客,而是 r 个顾客.当系统中的顾客数不足 r 个时,服务台不进行服务,一直等待系统中的顾客数到达 r 个时才开始进行服务.其他假设与上述的 $M/M/1$ 系统相同.

由于 $M/M^r/1$ 系统中的顾客数就是上节 $E_r/M/1$ 系统中的

相位数,因此 $M/M^r/1$ 系统队长的平稳分布为

$$\pi_j = \begin{cases} \frac{1}{r}(1 - \frac{1}{z_0^{j+1}}), & 0 \leqslant j \leqslant r-1, \\ \frac{\rho(z_0 - 1)}{r} z_0^{r-j-1}, & j \geqslant r, \end{cases} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1, \quad (2.5.1)$$

其中 z_0 满足:$1 + \rho z_0^{r+1} = (1+\rho) z_0^r$.

2.5.2 最多服务 r 个的批服务 $M/M/1$ 系统

现介绍最多服务 r 个顾客的批服务 $M/M/1$ 系统.现在的系统每次最多服务 r 个顾客,最少服务一个顾客,其它假设与 $M/M/1$ 系统相同.当 $r=1$ 时就变为 $M/M/1$ 系统.

设 $X(t)$ 为时刻 t 时系统中的顾客数,则 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 是一个齐次马氏链.类似于(2.4.1)式的推导,$\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的 Q 矩阵中的元素为

$$\begin{cases} q_{i,i+1} = \lambda, & i \geqslant 0, \\ q_{i0} = \mu, & i \leqslant r, \\ q_{ii} = -(\mu + \lambda), & i > 0, \\ q_{i,i-r} = \mu, & i > r, \\ q_{00} = -\lambda \\ q_{ij} = 0, & \text{其它}. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

由 (1.5.25) 式得平稳方程:

$$\begin{cases} \lambda \pi_0 = \mu \sum_{i=1}^{r} \pi_i, \\ (\lambda + \mu)\pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu \pi_{r+j}, & j = 1,2,3,\cdots. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

设概率分布 $\{\pi_i, i \geqslant 0\}$ 的 PGF 为 $\pi(z)$,则由 (2.5.3) 式,得

$$(\lambda + \mu)[\pi(z) - \pi_0] = \lambda z \pi(z) + \frac{\mu}{z^r}\Big[\pi(z) - \sum_{j=0}^{r} z^j \pi_j\Big].$$

从而

$$\pi(z) = \frac{z^r(\lambda + \mu)\pi_0 - \mu \sum_{j=0}^{r} \pi_j z^j}{(\lambda + \mu - \lambda z) z^r - \mu}, \quad (2.5.4)$$

由(2.5.3)式的第一式，得

$$z^r(\lambda+\mu)\pi_0=\mu z^r\sum_{j=0}^{r}\pi_j.$$

从而(2.5.4)式变为

$$\pi(z)=\frac{\sum_{j=0}^{r-1}\pi_j(z^j-z^r)}{1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^r}. \qquad (2.5.5)$$

易见 (2.5.5) 式的分母与 (2.4.5) 式的分母相同，所以

$$1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^r$$

在单位圆 $|z|=1$ 外有惟一零点(记为 z_0) 又 $z=1$ 是(2.5.5)式分子、分母的零点，且当 $|z|\leqslant 1$ 时，$\pi(z)$ 是解析的，故在 $|z|<1$ 内，$\frac{1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^r}{(z-1)(z-z_0)}$ 与 $c\sum_{k=0}^{r-1}\pi_k\frac{z^k-z^r}{z-1}$ 有相同的 $r-1$ 个零点，即 $\frac{1+\rho z^{r+1}-(1+\rho)z^r}{(z-1)(z-z_0)}=c\sum_{k=0}^{r-1}\pi_k\frac{z^k-z^r}{z-1}$. 从而由(2.5.5)式，得

$$\pi(z)=\frac{1}{c(z-z_0)}.$$

又由 $\pi(1)=1$，得 $c=\frac{1}{1-z_0}$，从而

$$\pi(z)=\frac{1-z_0}{z-z_0}=\frac{1-1/z_0}{1-z/z_0}=(1-\frac{1}{z_0})\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{z_0})^k$$

$$=(1-\frac{1}{z_0})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z_0^k}z^k. \qquad (2.5.6)$$

故队长的平稳分布为

$$\pi_k=(1-\frac{1}{z_0})(\frac{1}{z_0})^k,\quad k=0,1,2,\cdots. \qquad (2.5.7)$$

所以平均队长为

$$E(X)=\frac{1}{z_0-1}. \qquad (2.5.8)$$

有利特尔公式平均逗留时间为

$$E(T)=\frac{1}{\lambda(z_0-1)}. \qquad (2.5.9)$$

§2.6 $E_r^{\xi}/M/1$ 系统

$E_r^{\xi}/M/1$ 系统是 $E_r/M/1$ 系统的推广.除每次到达是 ξ 个顾客外,其他假设与 §2.4 中 $E_r/M/1$ 的系统相同.ξ 为取正整数值随机变量.记 $E(\xi)=d$,$E(\xi^2)=d^{(2)}$,并设 ξ,$\{J_k,k\geqslant 1\}$,$\{B_k,k\geqslant 1\}$ 相互独立.设 ξ_k 为第 k 批到达的顾客数.则 $\{\xi_k,k\geqslant 1\}$ 为 i.i.d 随机变量序列,且均与 ξ 同分布.

2.6.1 队长的分布

定理 2.6.1 设 Q 为一个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数,则 Q 的 PGF 为

$$Q(Z)=\frac{[1-g^r-dg^r][1-\xi(z)]}{d[1+z\xi(z)g^r-g^r-z]},$$

$$g\equiv\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\ \rho\equiv\frac{\lambda d}{r\mu}<1, \tag{2.6.1}$$

其中 $\xi(z)=E(z^{\xi})$, 且 $E(Q)=\dfrac{2d^2g^r+(1-g^r)(d^{(2)}-d)}{2d(1-g^r-dg^r)}$, $\rho<1$.

$$\tag{2.6.2}$$

证 设 Q_n 为第 n 个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数. Y_n 为在第 n 个顾客服务时间中到达的顾客数,并设

$$\epsilon(x)=\begin{cases}1,\ x>0,\\0,\ x\leqslant 0.\end{cases} \tag{2.6.3}$$

则易见有关系式

$$Q_{n+1}=Q_n-\epsilon(Q_n)+Y_{n+1}+(\xi-1)\epsilon(1-Q_n), \tag{2.6.4}$$

设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为系统的输入过程,即 $X(t)$ 表示在时间区间 $(0,t]$ 中到达的顾客数. $\overline{X}(t)$ 表示在 $(0,t]$ 中到达的批数. $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 表示参数为 λ 的泊松过程.则有 $Y_{n+1}=X(B_{n+1})$,且 Y_{n+1},Q_n,ξ 相互独立.由全期望公式,Y_{n+1} 的 PGF 为

$$Y_{n+1}(z)\equiv E(z^{Y_{n+1}})=E(Z^{X(B_{n+1})})$$

$$= \int_0^\infty E[Z^{X(t)}]\mu e^{-\mu t}dt$$

$$= \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} E[Z^{X(t)} \mid \overline{X}(t) = j]P\{\overline{X}(t) = j\}\mu e^{-\mu t}dt$$

$$= \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} [E(z^{\xi})]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\mu e^{-\mu t}dt$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} [\xi(z)]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} \frac{\lambda^i \mu}{i!}\int_0^\infty t^i e^{-(\lambda+\mu)t}dt$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} [\xi(z)]^j \sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} \frac{\lambda^i \mu}{(\lambda + \mu)^{i+1}}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} [\xi(z)]^j (1 - g^r) g^{jr} = \frac{1 - g^r}{1 - g^r \xi(z)}, \quad (2.6.5)$$

其中 $\xi(Z)$ 为 ξ 的 PGF，于是 Q_{n+1} 的 PGF 为

$$Q_{n+1}(z) = E(Z^{Y_{n+1}})E[Z^{Q_n - \varepsilon(Q_n) + (\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]$$

$$= \frac{1 - g^r}{1 - g^r\xi(z)}\left[\frac{\xi(z) - 1}{z}P\{Q_n = 0\} + \frac{1}{z}Q_n(z)\right]. \quad (2.6.6)$$

在条件 $\rho < 1$ 下，令 $n \to \infty$，记

$$Q(z) = \lim_{n\to\infty} Q_n(z), P\{Q = 0\} = \lim_{n\to\infty} P\{Q_n = 0\},$$

得

$$Q(z) = \frac{1 - g^r}{1 - g^r\xi(z)}\left[\frac{\xi(z) - 1}{z}P\{Q = 0\} + \frac{Q(z)}{z}\right].$$

解出 $Q(z)$，得

$$Q(z) = \frac{(1 - g^r)P\{Q = 0\}[\xi(z) - 1]}{Z - g^r z\xi(z) - 1 + g^r}. \quad (2.6.7)$$

令 $z = 1$，得

$$P\{Q = 0\} = \frac{1 - g^r - dg^r}{d(1 - g^r)}. \quad (2.6.8)$$

将(2.6.8)代入(2.6.7)立得(2.6.1). 由(2.6.1)可得(2.6.2).

2.6.2 忙期的分布

定理 2.6.2 设 θ 为一个顾客引出的忙期长，Θ 为由一批(ξ 个)

顾客引出的忙期长(Θ 为系统的真正忙期),则 θ,Θ 的 LST 分别为

$$\theta^*(s)=\frac{\mu[(s+\lambda+\mu)^r-\lambda^r]}{(s+\mu)\{(s+\lambda+\mu)^r-\lambda^r\xi[\theta^*(s)]\}},\quad (2.6.9)$$

$$\Theta^*(s)=\xi\left\{\frac{\mu[(s+\lambda+\mu)^r-\lambda^r]}{(s+\mu)\{(s+\lambda+\mu)^r-\lambda^r\xi[\Theta^*(s)]\}}\right\},\quad (2.6.10)$$

且

$$E(\theta)=\frac{(1-g^r)}{\mu(1-g^r-dg^r)},\ \rho<1,\quad (2.6.11)$$

$$E(\Theta)=\frac{d(1-g^r)}{\mu(1-g^r-dg^r)},\ \rho<1.\quad (2.6.12)$$

证　因为忙期与服务顺序无关,所以,我们可依如下顺序进行服务.在某个顾客的服务时间 B 中,可能到达系统若干批顾客.当该顾客被服务后,接着为第一批顾客服务,当第一批所有顾客以及由第一批顾客引出的所有顾客都被服务完后再为第二批顾客以及由第二批顾客引出的所有顾客服务,依此类推,于是有

$$\theta=B+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\overline{X}(B)},\quad (2.6.13)$$

其中 Θ_i 为在服务时间 B 中到达的第 i 批顾客引出的忙期长.易见 $\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3,\cdots$ 相互独立且均与 Θ 同分布.$\overline{X}(B)$ 表示在 B 中到达的批数.又因每批有 ξ 个顾客,所以有

$$\Theta=\sum_{i=1}^{\xi}\theta_i,\quad (2.6.14)$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$,为相互独立且均与 θ 同分布的随机变量序列.由上两式得

$$\begin{aligned}\theta^*(s)\equiv E(e^{-s\theta})&=\int_0^{\infty}e^{-st}E[e^{-s(\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\overline{X}(t)})}]\mu e^{-\mu t}dt\\&=\sum_{j=0}^{\infty}[\Theta^*(s)]^j\sum_{i=jr}^{(j+1)r-1}\frac{(\mu\lambda)^i}{(s+\lambda+\mu)^{i+1}}\\&=\frac{\mu[(s+\lambda+\mu)^r-\lambda^r]}{(s+\mu)[(s+\lambda+\mu)^{\lambda}-\lambda^{\gamma}\Theta^*(s)]}\end{aligned}\quad (2.6.15)$$

与

$$\Theta^*(s)=\xi[\theta^*(s)].\quad (2.6.16)$$

将(2.6.16)代入(2.6.15)立得(2.6.9).再由(2.6.16)与(2.6.9)立得(2.6.10).因为

$$E[\overline{X}(B)] = \int_0^\infty E[\overline{X}(t)]\mu e^{-\mu t}dt$$
$$= \int_0^\infty \mu e^{-\mu t}\sum_{j=0}^\infty j\sum_{i=jr}^{(j+1)r-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}dt$$
$$= \sum_{j=0}^\infty j\sum_{i=jr}^{(j+1)r-1}(1-g)g^i \qquad (2.6.17)$$
$$= \frac{g^r}{1-g^r},$$

所以由(2.6.13),(2.6.14)与(2.6.17),得

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu} + E(\Theta)E[\overline{X}(B)] = \frac{1}{\mu} + \frac{g^r}{1-g^r}E\left[\sum_{i=1}^{\xi}\theta_i\right]$$
$$= \frac{1}{\mu} + \frac{dg^r}{1-g^r}E(\theta). \qquad (2.6.18)$$

由(2.6.18)立得(2.6.11).由(2.6.11)与(2.6.14)立得(2.6.12).或由(2.6.9)亦可得(2.6.11),由(2.6.10)亦可得(2.6.12).定理2.6.2证毕.

定理 2.6.3 设 M 为在 θ 中服务完的顾客数,Σ 为在 Θ 中服务完的顾客数,则 M,Σ 的 PGF 分别为

$$M(Z) = \frac{Z(1-g^r)}{1-g^r\xi[M(Z)]}, \qquad (2.6.19)$$

$$\Sigma(z) = \xi\left[\frac{z(1-g^r)}{1-g^r\Sigma(Z)}\right], \qquad (2.6.20)$$

且

$$E(M) = \frac{1-g^r}{1-g^r-dg^r},\ \rho < 1, \qquad (2.6.21)$$

$$E(\Sigma) = \frac{d(1-g^r)}{1-g^r-dg^r},\ \rho < 1. \qquad (2.6.22)$$

证 类似于定理2.6.2的分析,有

$$M = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{\overline{X}(B)} \qquad (2.6.23)$$

$$与\ \Sigma = \sum_{i=1}^{\xi} M_i, \qquad (2.6.24)$$

其中 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \cdots$ 为相互独立且均与 Σ 同分布的随机变量序列. $M_1, M_2, M_3, \cdots$ 为相互独立且均与 M 同分布的随机变量序列. 再用证明定理 2.6.2 的方法可证定理 2.6.3.

2.6.3 等待时间的分布

定理 2.6.4 设 W 为一顾客的等待时间, 则在先来后服务与非抢占的情况下, W 的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{d\mu g^r[(s+\lambda+\mu)^r - \lambda^r]\left[1 - \xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{d(1-g^r)S[(s+\lambda+\mu)^r - \lambda^r\Theta^*(s)]} + \frac{(1-g^r-dg^r)(s+\mu)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{(1-g^r)ds} \tag{2.6.25}$$

且

$$E(W) = \frac{1-g^r}{\mu(1-g^r-dg^r)} + \frac{d^{(2)}-d}{2d\mu}, \quad \rho < 1. \tag{2.6.26}$$

证 设 A 为系统中任一个顾客. 则其等待时间由两部分组成. 一部分是 A 的所在批的等待时间(即 A 所在批中第一个被服务的顾客的等待时间), 记为 W_f, 另一部分是 A 在批中等待时间, 记为 W_s, 易见 W_f 与 W_s 独立, 故 W 的 LST 为

$$W^*(s) = W_f^*(s)W_s^*(s). \tag{2.6.27}$$

因为 A 为所在批中的任一个顾客, 所以可以在 ξ 个顾客组成的队列中的 ξ 个位置的任一个位置. 现依如下方法确定 A 在队列中的位置: 在批服务时间 $U \equiv \sum_{i=1}^{\xi} B_i$ 中任取一点, 该点将依概率为 1 落在某个服务时间 B 中, 现以 B 所在批队列中的位置为 A 在批队列中的位置是合理的. 由图 2-2, 有

$$U_+ = W_s + B_+. \tag{2.6.28}$$

由于 B_+ 与 B 同分布, 且 B_+ 与 W_s 独立, 所以有

$$U_+^*(s) = W_s^*(s)B_+^*(s) = W_s^*(s)\frac{\mu}{\mu+s}.$$

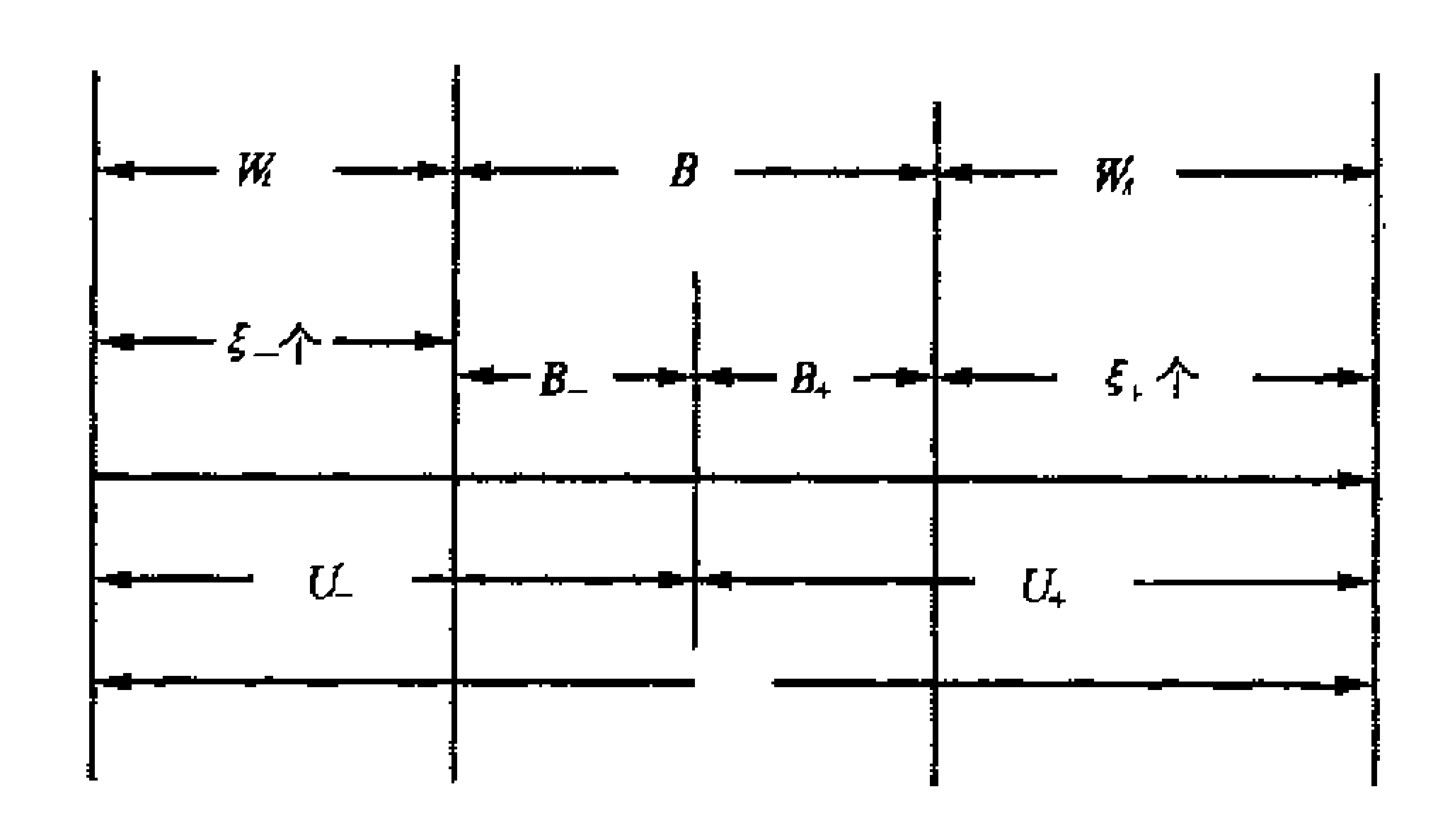


图 2-2

由 (1.6.30),得

$$\frac{1-U^*(s)}{sE(U)}=W_s^*(s)\frac{\mu}{\mu+s}.$$

又因 U 的 LST 为

$$U^*(s)=\xi[B^*(s)]=\xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right),E(U)=E(\xi)E(B)=\frac{d}{\mu},$$

所以得

$$W_s^*(s)=\frac{(\mu+s)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{ds}. \qquad (2.6.29)$$

又因,当 A 所在批到达系统时,如果系统不空,有

$$W_f=B_++\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\overline{X}(B_+)}. \qquad (2.6.30)$$

因为 B_+ 与 B 同分布,如果记 $p=P\{$到达时系统不空$\}$,则

$$W_f^*(s)=p\theta^*(s)+1-p.$$

由[11]知,在任意时刻系统的队长 L 的 PGF 为

$$L(z)=\frac{Q(z)}{\xi_-(z)}, \qquad (2.6.31)$$

其中 $\xi_-(z)$ 是 ξ_- 的 PGF,由图 2-2 知

$$W_t^*(s)=E(e^{-s\sum_{i=1}^{\xi_-}B_i})=\xi_-[B^*(s)]. \qquad (2.6.32)$$

又

$$U_-^*(s) = W_t^*(s)B_-^*(s) = W_t^*(s)\frac{\mu}{\mu+s},$$

即

$$\frac{1-U^*(s)}{sE(U)} = \frac{\mu\{1-\xi[B^*(s)]\}}{sd} = W_t^*(s)\frac{\mu}{\mu+s}.$$

故

$$W_t^*(s) = \frac{(\mu+s)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{ds}. \qquad (2.6.33)$$

由(2.6.32)与(2.6.33)得［令 $B^*(s) = \frac{\mu}{\mu+s} = z$］

$$\xi_-(z) = \frac{(\mu+s)[1-\xi(z)]}{ds} = \frac{1-\xi(z)}{(1-z)E(\xi)}. \qquad (2.6.34)$$

从而

$$L(z) = \frac{d(1-z)Q(z)}{1-\xi(z)}. \qquad (2.6.35)$$

令 $z = 0$,得

$$1-p = L(0) = \frac{1-g^r-dg^r}{1-g^r}. \qquad (2.6.36)$$

把(2.6.36)代入(2.6.31)后,再将(2.6.21)与(2.6.29)代入(2.6.27)立得(2.6.25).

由(2.6.25)可得(2.6.26).或由于 $W = W_f + W_s$ 和(2.6.28)与(2.6.30)亦可得(2.6.26).

定理 2.6.5 设 W 为一个顾客的等待时间,则对于先来先服务非抢占情况下,W 的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{(1-\delta)(ds+\mu)(s+\mu)\left[1-\xi\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)\right]}{ds[ds+\mu(1-\delta)]}, \qquad (2.6.37)$$

且

$$E(W) = \frac{d\delta}{\mu(1-\delta)} + \frac{d^{(2)}-d}{2d\mu}, \qquad (2.6.38)$$

其中 δ 满足

$$\delta = \frac{\lambda^r}{\left[\lambda + \frac{\mu}{d}(1-\delta)\right]^r}. \tag{2.6.39}$$

证 W 这时仍由两部分组成.一部分是批等待时间 W_f,另一部分是 A 在批中的等待时间 W_t, W_t 的 LST 由(2.6.33) 给出.由[6]知,对于到达间隔时间 J 服从一般分布的$G/M/1$ 系统,在先来先服务非抢占的情况下,一个顾客的等待时间 W_g 的分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1 - \delta e^{-\mu(1-\delta)t}, & t > 0. \end{cases} \tag{2.6.40}$$

故 W_g 的 LST 为

$$W_g^*(s) = \frac{(1-\delta)(s+\mu)}{s+\mu(1-\delta)}, \tag{2.6.41}$$

其中 δ 满足 $\delta = J^*(\mu - \mu\delta)$, $[J^*(s)$ 为 J 的 LST$]$. 所以,对于 $E_r/M/1$ 系统,这时 (2.6.41) 变为$\left[因\ J^*(s) = \frac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r}\right]$

$$W_g^*(s) = \frac{(1-\delta)(\mu+s)}{s+\mu(1-\delta)},\ \delta\ 满足\ \delta = \frac{\lambda^r}{(\mu-\mu\delta+\lambda)^r}.$$

从而,对于 $E_r^\xi/M/1$ 系统,可以看成到达间隔时间 $J \sim \Gamma(r,\lambda)$ 服务时间 $U = \sum_{i=1}^{\xi} B_i$ 的系统.

因为 $E(U) = \frac{d}{\mu}$, 所以 W_f 的 LST 为

$$W_f^*(s) = \frac{(1-\delta)(ds+\mu)}{ds+\mu(1-\delta)},\ \delta\ 满足:\ \delta = \frac{\lambda^r}{\left[\lambda + \frac{\mu}{d}(1-\delta)\right]^r}. \tag{2.6.42}$$

由 (2.6.42) 与 (2.6.33) 立得 (2.6.37).由 (2.6.37) 可得 (2.6.38).

§2.7 具有反馈的 $E_r^\xi/M/1$ 系统

具有反馈的 $E_r^\xi/M/1$ 系统是系统 $E_r^\xi/M/1$ 的推广,前者与后者的区别是:每个顾客被服务完后以概率 σ 离开系统,而以概率 $\bar{\sigma} = 1 - \sigma$ 立刻反馈到队尾等待下一次的服务.设 η 表示一个顾客总

的服务次数,则 $\eta \sim \mathrm{Geo}(\sigma)$.

2.7.1 队长的分布

定理 2.7.1 设 Q 表示一个顾客被服务完时(不一定离开系统)系统中的顾客数,则 Q 的 PGF 为

$$Q(z)=\frac{(\sigma+\bar{\sigma}z)[\xi(z)-1][1-g^r-dg^r-\bar{\sigma}(1-g^r)]}{d[z-zg^r\xi(z)-(1-g^r)(\sigma+\bar{\sigma}z)]},\quad \rho<1, \tag{2.7.1}$$

且

$$E(Q)=\frac{[d-2\sigma d+d^{(2)}][1-g^r-dg^r-\bar{\sigma}(1-g^r)]+d^2g^r+dd^{(2)}g^r}{2[1-g^r-dg^r-\bar{\sigma}(1-g^r)]^2},\quad \rho<1, \tag{2.7.2}$$

其中 $g=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$,$\xi(z)$ 为 ξ 的 PGF,$\sigma_1^2=D(\xi)$,$\rho=\frac{\lambda}{d\mu\sigma}$.

证 设 Q_n 为第 n 个顾客被服务完时(不一定离开系统)系统中的顾客数,则有

$$Q_{n+1}=Q_n-\varepsilon(Q_n)+\sum_{j=1}^{\overline{X}(B_{n+1})}\xi_j+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)+\xi_{n+1}, \tag{2.7.3}$$

其中,$\{\overline{X}(t),t\geqslant 0\}$ 为系统的输入批数过程,其间隔时间序列 $\{J_k,k\geqslant 1\}$ 为i.i.d随机变量序列,且 $J_i\sim\Gamma(r,\lambda)$,ξ_i 表示第 i 批到达的顾客数,诸 ξ_i 独立同分布,均与 ξ 同分布.

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

ξ_{n+1} 是第 $n+1$ 个顾客数服务的反馈数,即 $\xi_{n+1}\sim B(1,\sigma)$.由(2.6.5)式 $\sum_{j=1}^{\overline{X}(B_{n+1})}\xi_j$ 的 PGF 为

$$E\left[z^{\sum_{j=1}^{\overline{X}(B_{n+1})}\xi_j}\right]=\frac{1-g^r}{1-g^r\xi(z)}. \tag{2.7.4}$$

再由随机变量的独立性,得

$$Q_{n+1}(z)=E\left[z^{\sum_{j=1}^{\overline{X}(B_{n+1})}\xi_j}\right]E(z^{\xi_{n+1}})E[z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]$$

$$= \frac{1-g^r}{1-g^r\xi(z)}(\sigma+\bar{\sigma}z)\left[\frac{\xi(z)-1}{z}p\{Q_n=0\}+\frac{1}{z}Q_n(z)\right].$$

令 $n\to\infty$,记 $Q(z)=\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(z)$,$P\{Q=0\}=\lim\limits_{n\to\infty}P\{Q_n=0\}$,因为 $\rho<1$,所以有

$$Q(z)=\frac{(1-g^r)(\sigma+\bar{\sigma}z)}{1-g^r\xi(z)}\left[\frac{\xi(Z)-1}{Z}P\{Q=0\}+\frac{1}{Z}Q(Z)\right],$$

即

$$Q(z)=\frac{(1-g^r)(\sigma+\bar{\sigma}z)[\xi(z)-1]P\{Q=0\}}{z-zg^r\xi(z)-(1-g^r)(\sigma+\bar{\sigma}z)}.\quad(2.7.5)$$

令 $z=1$,得

$$P\{Q=0\}=\frac{1-g^r-dg^r-\bar{\sigma}(1-g^r)}{d(1-g^r)}.\quad(2.7.6)$$

将(2.7.6)代入(2.7.5)立得(2.7.1).由(2.7.1)可得(2.7.2).

2.7.2 忙期的分布

设 θ 为一个顾客引出的忙期,M 为在一个忙期 θ 中服务完且离开系统的顾客数.Θ 为一批顾客(ξ 个顾客)引出的忙期,Σ 为在一个 Θ 中服务完且离开系统的顾客数.

定理 2.7.2 在上述条件下,有

$$\theta^*(s)=\frac{\sigma\mu(1-x^r)x}{\lambda(1-x)[1-x^r\xi(\theta^*(s))]},\quad(2.7.7)$$

$$E(\theta)=\frac{d(\bar{\sigma}\mu+\lambda)^r-\lambda^r d}{\sigma\mu[d(\bar{\sigma}\mu+\lambda)^r-d\lambda^r-\lambda^r]},\ \rho<1,\quad(2.7.8)$$

$$M(z)=\frac{z[(\bar{\sigma}\mu+\lambda)^r-\lambda^r]}{(\bar{\sigma}\mu+\lambda)^r-\lambda^r\xi[M(z)]},\quad(2.7.9)$$

$$E(M)=\frac{d(\bar{\sigma}\mu+\lambda)^r-d\lambda^r}{d(\bar{\sigma}\mu+\lambda)^r-d\lambda^r-\lambda^r},\rho<1,\quad(2.7.10)$$

其中

$$x=\frac{\lambda}{\sigma\mu+\lambda+s}.$$

证 因为忙期与顺序无关,记

$$U = \sum_{i=1}^{\eta} B_i, \Theta = \sum_{i=1}^{\xi} \theta_i, \Sigma = \sum_{i=1}^{\xi} M_i,$$

则有

$$\theta = U + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{\overline{X}(U)}, \qquad (2.7.11)$$

$$M = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{\overline{X}(U)}, \qquad (2.7.12)$$

其中$\{\theta_i, i \geqslant 1\}$,$\{M_i, i \geqslant 1\}$,$\{\Theta_i, i \geqslant 1\}$,$\{\Sigma_i, i \geqslant 1\}$均为独立同分布随机变量序列,且$\theta_1$与$\theta$同分布,$M_1$与$M$同分布,$\Theta_i$与$\Theta$同分布,$\Sigma_1$与$\Sigma$同分布.由(2.7.11)得

$$\theta^*(s) = E\{e^{-s[U+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\overline{X}(U)}]}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E\{e^{-s[A+\Theta_1\Theta_2+\cdots\Theta_{\overline{X}(A)}]}\} P\{\eta = n\}, \quad (2.7.13)$$

其中 $A = \sum_{i=1}^{n} B_i \sim \Gamma(n, u)$.又因

$$E\{e^{-s[A+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{\overline{X}(A)}]}\}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} E\{e^{-s[\Theta_1+\cdots+\Theta_{\overline{X}(t)}]}\} \frac{\mu^n t^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{\mu t} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j \mu^n t^{n-1}}{j!(n-1)!} e^{-\mu t} dt,$$

将上式代入(2.7.13),得

$$\theta^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sigma\mu e^{-\mu\sigma t} dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\sigma\mu\lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j e^{-(\lambda+\mu\sigma+s)t} dt$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\sigma\mu\lambda^j}{j!} \cdot \frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda+\sigma\mu+s)^{j+1}}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} [\Theta^*(s)]^m \frac{\sigma\mu}{\lambda+\sigma\mu+s} \cdot \frac{x^{mr}(1-x^r)}{1-x}$$

$$= \frac{\sigma\mu x(1-x^r)}{\lambda(1-x)[1-\Theta^*(s)x^r]}$$

$$= \frac{\sigma\mu x(1-x^r)}{\lambda(1-x)\{1-x^r\xi[\Theta^*(s)]\}}.$$

于是 (2.7.7) 得证. 由 (2.7.7) 可得 (2.7.8) 或更简单地由 (2.7.11) 得

$$E(\theta) = \frac{1}{\sigma\mu} + \frac{E(\theta)}{d} E[\overline{X}(u)]. \qquad (2.7.14)$$

又因

$$\begin{aligned}
E[\overline{X}(U)] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[\overline{X}(\sum_{i=1}^{n} B_i)]\sigma \bar{\sigma}^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} E[\overline{X}(t)] \frac{e^{-\mu t}\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} dt\sigma \bar{\sigma}^{n-1} \\
&= \sigma\mu \int_0^{\infty} E(\overline{X}(t)) e^{-\sigma\mu t} dt \\
&= \sigma\mu \int_0^{\infty} e^{-\sigma\mu t} \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} dt \\
&= \sigma\mu \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\lambda^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j e^{-(\lambda+\sigma\mu)t} dt \\
&= \sigma\mu \sum_{m=1}^{\infty} m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} \frac{\lambda^j}{(\lambda+\sigma\mu)^{j+1}!} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma\mu}\right)^r\right] \left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma\mu}\right)^{mr} \\
&= \frac{\lambda^r}{(\sigma\mu+\lambda)^r - \lambda^r}, \qquad (2.7.15)
\end{aligned}$$

将 (2.7.15) 代入 (2.7.14) 立得 (2.7.8). 由 (2.7.12) 得

$$\begin{aligned}
M(z) = E(z^M) &= ZE[z^{\sum_1 + \sum_2 + \cdots + \sum_{\overline{X}(U)}}] \\
&= Z\sum_{n=1}^{\infty} E[z^{\sum_1 + \sum_2 + \cdots + \sum_{\overline{X}(A)}}]\sigma\bar{\sigma}^{n-1} \\
&= Z\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} E[z^{\sum_1 + \sum_2 + \cdots + \sum_{\overline{X}(t)}}] \frac{\mu^n t^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\quad \cdot e^{-\mu t} dt\sigma\bar{\sigma}^{n-1} \\
&= Z\int_0^{\infty} E[z^{\sum_1 + \sum_2 + \cdots + \sum_{\overline{X}(t)}}]\sigma\mu e^{-\sigma\mu t} dt \\
&= Z\int_0^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [\textstyle\sum(z)]^m \sum_{j=mr}^{(m+1)r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sigma\mu e^{-\sigma\mu t} dt
\end{aligned}$$

$$= Z\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum(z)\right]^m\sum_{j=mr}^{(m+1)r-1}\frac{\sigma\mu\lambda^j}{j!}\frac{\Gamma(j+1)}{(\lambda+\sigma\mu)^{j+1}}$$

$$= Z\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum(z)\right]^m\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma\mu}\mu\right)^r\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda+\sigma\mu}\right)^{mr}$$

$$= \frac{z[(\sigma\mu+\lambda)^r-\lambda^r]}{(\sigma\mu+\lambda)^r-\lambda^r\xi(M(z))}.$$

于是 (2.7.9) 得证. 由 (2.7.12) 可得 (2.7.10).

2.7.3 逗留时间的分布

定理 2.7.3 设 S 表示一个顾客的总的逗留时间, S_j 表示一个顾客的第 j 次逗留时间, $j=1,2,3,\cdots$, 则

$$S^*(s)=\frac{\sigma}{1-\bar{\sigma}S_2^*(s)}\cdot\left\{\frac{[1-g^r-dg^r-\bar{\sigma}(1-g^r)]\mu}{(1-g^r)(\mu+s)}+\frac{[dg^r+\bar{\sigma}(1-g^r)]S_2^*(s)}{1-g^r},\right\} \quad (2.7.16)$$

其中 $S_2^*(s)$ 由下式确定:

$$Q(z)=\int_0^{\infty}e^{-(\bar{\sigma}\mu-\bar{\sigma}\mu z)t}\sum_{n=0}^{\infty}[\xi(z)]^nP\{\overline{X}(t)=n\}dP\{s_2\leqslant t\}. \quad (2.7.17)$$

而 $Q(z)$ 由 (2.7.1) 给出.

证 某顾客的逗留时间序列 $\{S_j,j\geqslant 1\}$ 显然是相互独立随机变量序列, 且 $S_2,S_3,S_4,\cdots$ 同分布. 如果该顾客到达时系统不空, 则 S_1 与 S_2 同分布; 如果该顾客到达时系统是空的, 则 $S_1=B$. 由 (2.6.35) 知, 在任意时刻系统的队长的 PGF 为

$$L(z)=\frac{(1-z)dQ(z)}{1-\xi(z)}, \quad (2.7.18)$$

其中, $Q(z)$ 由 (2.7.1) 给出. 所以, 在任意时刻系统空的概率由 (2.7.18) 和 (2.7.6) 得

$$L(0)=dQ(0)=\frac{1-g^r-dg^r-\bar{\sigma}(1-g^r)}{1-g^r}. \quad (2.7.19)$$

从而, S_1 的 LST 为

$$S_1^*(s) = E(e^{-ss_1}) = \frac{\mu[1 - g^r - dg^r - \bar{\sigma}(1 - g^r)]}{(\mu + s)(1 - g^r)} + \frac{[dg^r + \bar{\sigma}(1 - g^r)]S_2^*(s)}{1 - g^r}. \qquad (2.7.20)$$

又因 $S = \sum_{j=1}^{\eta} S_j$,故 S 的 LST 为

$$S^*(s) = E(e^{-ss_1})E[e^{-s(s_2+s_3+\cdots+s_\eta)}] = E(e^{-ss_1})\frac{\sigma}{1 - \bar{\sigma}S_2^*(s)}. \qquad (2.7.21)$$

又因

$$Q = \sum_{j=1}^{\overline{X}(s_2)} \xi_j + f(s_2), \qquad (2.7.22)$$

其中,$f(s_2)$ 为当系统不空时在 S_2 中反馈的顾客数.故

$$Q(z) = \int_0^\infty E[Z^{\sum_{j=1}^{\overline{X}(t)}\xi_j + f(t)}]dP\{S_2 \leqslant t\}$$

$$= \int_0^\infty E[Z^{\sum_{j=1}^{\overline{X}(t)}\xi_j}]E[Z^{f(t)}]dP\{S_2 \leqslant t\}, \quad [\because f(t) \sim P(\bar{\sigma}ut)]$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty}[\xi(z)]^n P\{\overline{X}(t) = n\}e^{-(1-z)\bar{\sigma}\mu t}dP\{S_2 \leqslant t\}. \qquad (2.7.23)$$

由 (2.7.23),(2.7.22) 与(2.7.21) 定理 2.7.3 得证.

§2.8 $M/M/\cdot$ 系统的忙期

在 §2.3 中,我们给出了 $M/M/\cdot$ 系统的平均忙期,现在我们来讨论其忙期的分布.为此,先再一次强调几个概念.从系统由空变为不空时起一直到系统又变为空时止这段时间称为系统的忙期,记为 θ.从系统中有 k 个顾客时起一直到系统中没有顾客(空)时止这段时间称为系统的 k 阶忙期,记为 W_k.从系统中有 k 个顾客在等待服务(不包含正在服务的顾客)时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间称为系统的 k 阶繁忙期,记为 A_k.零阶

繁忙期 A_0 简称为繁忙期，它是从系统中所有服务台都进入服务时起一直到有一个服务台空闲时止这段时间. 显然，对于系统 $M/M/1$ 有

$$W_1 = A_0 = \theta, A_k = W_{k+1} = \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{k+1}, \tag{2.8.1}$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{k+1}$ 为独立同分布随机变量，且均与 θ 同分布.

2.8.1 几个引理

引理 2.8.1 对于 $M/M/n$ 系统，当 $n\mu > \lambda$ 时，有

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + \lambda + s - \lambda A_0^*(s)}, \tag{2.8.2}$$

$$E(A_0) = \frac{1}{n\mu - \lambda}, D(A_0) = \frac{\lambda + n\mu}{(n\mu - \lambda)^3}, \tag{2.8.3}$$

$$A_k^*(s) = [A_0^*(s)]^{k+1}, \tag{2.8.4}$$

$$E(A_k) = \frac{k+1}{n\mu - \lambda}, D(A_k) = \frac{(k+1)(\lambda + n\mu)}{(n\mu - \lambda)^3}. \tag{2.8.5}$$

证明见定理 2.3.4 和定理 2.3.5.

引理 2.8.2 对于 $M/M/n/n$ 系统有

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + s}, \quad E(A_0) = \frac{1}{n\mu}, \quad D(A_0) = \frac{1}{n^2\mu^2}. \tag{2.8.6}$$

证 由 $A_0 = \min(B_1, B_2, \cdots, B_n,) \sim \Gamma(1, n\mu)$ 可立得(2.8.6).

引理 2.8.3 设 A_{N0} 为 $M/M/n/N(n \leqslant N)$ 系统的繁忙期，则 A_{N0} 的 LST 为

$$A_{N0}^*(s) = \frac{n\mu}{s + \lambda + n\mu}\left[1 + \frac{\lambda A_{N0}^*(s)}{s + \lambda + n\mu} + \frac{\lambda^2 A_{N0}^*(s) A_{N-1,0}^*(s)}{(s + \lambda + n\mu)^2} + \cdots + \frac{\lambda^{N-n-1}\prod\limits_{i=n+1}^{N} A_{i0}^*(s)}{(s + \lambda + n\mu)^{N-n-1}}\right]$$
$$+ \frac{n\mu\lambda^{N-n}\prod\limits_{i=n+1}^{N} A_{i0}^*(s)}{(s + n\mu)(s + \lambda + n\mu)^{N-n}}, \tag{2.8.7}$$

其中 A_{i0} 为 $M/M/n/i(n \leqslant i)$ 系统的繁忙期，$i = n, n+1, \cdots, N$.

证 因为忙期与服务顺序无关，以及指数分布随机变量的无

记忆性.当 n 个服务台都进人服务时起,经过服务时间 β 后系统有一个顾客被服务完离开系统,而在 β 中可能且最多只可能有 $N-n$ 个顾客进人系统,$\beta=A_0$,这时空闲的服务台先对第 $N-n$ 个进人的顾客服务以及对在其服务期间到达(产生)的所有顾客(所有后代)服务.记其所花时间为 $A_{0,N-n}$.然后再为第 $N-n-1$ 个进人顾客以及由他所产生的所有后代服务,当他及其后代都服务完时(记所花时间为 $A_{0,N-n-1}$),再为第 $N-n-2$ 个顾客及其所有后代服务,以此类推最后为第一个进人的顾客及其后代服务,记其所花时间为 A_{01},设 $\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 为输入过程.由于这时到达间隔时间序列 $\{J_i,i\geqslant 1\}$ 是 i.i.d 随机变量序列,且 $J_1\sim\Gamma(1,\lambda)$,所以 $\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程,再设 $\epsilon(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $A_{00}\equiv 0$,则有

$$A_{N0}=\beta+\sum_{i=0}^{y(u_n)}A_{0,i\epsilon}[(N-n-Y(\beta))]. \qquad (2.8.8)$$

易见,$\beta,A_{01},A_{02},\cdots,A_{0,N-n}$ 与 $\{Y(t),t\geqslant 0\}$ 相互独立.且 A_{0i} 与 $A_{N-i+1,0}$ 同分布,即 $A_{0,N-n}$ 与 $A_{N+1,0}$ 同分布,$\cdots$,A_{01} 与 A_{N0} 同分布,所以

$$\begin{aligned}
A_{N0}^*(s) &= E(e^{-sA_{N0}})=E(e^{-s\{\beta+\sum_{i=0}^{Y(\beta)}A_{0,i\epsilon[N-n+1-Y(\beta)]}\}})\\
&=\int_0^\infty e^{-st}E\{e^{-s\sum_{i=0}^{Y(t)}A_{0,\epsilon[N-n+1-Y(\beta)]}}\}n\mu e^{-n\mu t}dt\\
&=\int_0^\infty e^{-st}\sum_{k=0}^\infty E\{e^{-s\sum_{i=0}^{k}A_{0,i\epsilon[N-n+1-k]}}\}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}n\mu e^{-n\mu t}dt\\
&=\sum_{k=0}^\infty\prod_{i=0}^k A_{0,i\epsilon(N-n+1-k)}^*(s)\int_0^\infty\frac{\lambda^k}{k!}t^k e^{-(\lambda+n\mu+s)t}dt\\
&=\sum_{k=0}^\infty\prod_{i=0}^k A_{0,i\epsilon(N-n+1-k)}^*(s)\frac{n\mu\lambda^k}{(s+\lambda+n\mu)^{k+1}}\quad(\because A_{00}^*(s)=1)\\
&=\frac{n\mu}{s+\lambda+n\mu}+\frac{\lambda n\mu A_{01}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^2}+\frac{\lambda^2 n\mu A_{01}^*(s)A_{02}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^3}+\cdots\\
&\quad+\frac{\lambda^{N-n-1}n\mu A_{01}^*(s)A_{02}^*(s)\cdots A_{0,N-n-1}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^{N-n}}\\
&\quad+\frac{\lambda^{N-n}n\mu A_{01}^*(s)A_{02}^*(s)\cdots A_{0,N-n}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^{N-n}(s+n\mu)}.
\end{aligned}$$

再考虑到 $A_{0i}^*(s)=A_{N-i+1,0}^*(s)$，可立得 (2.8.7). 由(2.8.7) 得

$$A_{n+j,0}^*(s) = \frac{n\mu}{s+\lambda+n\mu}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{\lambda^m\prod_{i=1}^{m}A_{n+j-i+1,0}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)^m}$$

$$+\frac{\lambda^j n\mu\prod_{i=1}^{j}A_{n+j-i+1,0}^*(s)}{(s+n\mu)(s+\lambda+n\mu)^j}, \tag{2.8.9}$$

$$j=0,1,2,\cdots,N-n.$$

特别

$$A_{n0}^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu+s}, \tag{2.8.10}$$

$$A_{n+1,0}^*(s) = \frac{n\mu}{s+\lambda+n\mu}+\frac{\lambda n\mu A_{n+1,0}^*(s)}{(s+n\mu)(s+\lambda+n\mu)}$$

$$= \frac{n\mu(s+n\mu)}{(s+n\mu)^2+\lambda s}, \tag{2.8.11}$$

$$A_{n+2,0}^*(s) = \frac{n\mu}{(s+\lambda+n\mu)}\left[1+\frac{\lambda A_{n+2,0}^*(s)}{(s+\lambda+n\mu)}\right]$$

$$+\frac{n\mu\lambda^2A_{n+2,0}^*(s)A_{n+1,0}^{*(s)}}{(s+n\mu)(s+\lambda+n\mu)^2}, \tag{2.8.12}$$

由上两式可解得 $A_{n+2,0}^*(s)$. 一般地，由 (2.8.9) 递推可解得

$$A_{n+1,0}^*(s)\ A_{n+2,0}^*(s),\cdots,\ A_{N0}^*(s).$$

2.8.2 M/M/· 系统的 k 阶忙期

定理 2.8.1 对于 M/M/· 系统有

$$\begin{cases} W_j^*(s)-W_{j+1}^*(s)=\dfrac{\mu_j}{\lambda_j}[W_{j-1}^*(s)-W_j^*(s)]-\dfrac{s}{\lambda_j}W_j^*(s), & j\geqslant 1,\\ W_0^*(s)=1, \end{cases} \tag{2.8.13}$$

其中，$W_j^*(s)$ 为 W_j 的 LST，μ_i 由 (2.3.2) 给出，λ_i 为系统的状态过程（生灭过程）的生率，是状态（系统中顾客数）i 的函数.

证 设 α_i 与 β_i 如引理2.3.1所设，则 $\alpha_j\sim\Gamma(1,\lambda_j)$，$\beta_j\sim\Gamma(1,\mu_j)$，且 α_j 与 β_j 相互独立.

因为从系统转移到状态 j 时起，经过时间 $\min(\alpha_j,\beta_j)$ 后系统的状态依概率为 1 要发生变化，或者由 j 变为 $j-1$，或者由 j 变为 $j+1$. 再由指数分布的性质和全期望公式以及经过 $\min(\alpha_j,\beta_j)$ 后，W_{j+1}, W_{j-1} 均与 $\min(\alpha_j,\beta_j)$ 无关，得

$$\begin{aligned}
W_j^*(s) &= E(e^{-sw_j}) \\
&= E[e^{-s\min(\alpha_j,\beta_j)}](E[e^{sw_j} \mid \alpha_j < \beta_j]P\{\alpha_j < \beta_j\} \\
&\quad + E[e^{-sw_j} \mid \alpha_j > \beta_j]P\{\alpha_j > \beta_j\}) \\
&= \frac{\lambda_j+\mu_j}{\lambda_j+\mu_j+s}\left[W_{j+1}^*(s)\frac{\lambda_j}{\lambda_j+\mu_j} + W_{j-1}^*(s)\frac{\mu_j}{\lambda_j+\mu_j}\right].
\end{aligned}$$

由此，立得 (2.8.13).

如果能由 (2.8.13) 解出 $W_j^*(s)$，就可得到 $M/M/\cdot$ 系统 k 阶忙期的分布. 然而要求出变系数二阶差分方程 (2.8.13) 的解析解不是一件容易的事情.

定理 2.8.2　设 $g_j = E(W_j^2)$，$\omega_j = E(W_j)$，$j = 1,2,3,\cdots$，则当 $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i < \infty$，$\sup_{i\geqslant 0}\{\lambda_i\}$，$\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\rho_i < \infty$ 时，有

$$g_1 = 2\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\rho_i, \tag{2.8.14}$$

$$g_j = g_1 + g_1\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{2\lambda_i\rho_i} - 2\sum_{m=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\omega_i}{\lambda_i}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\mu_k}{\lambda_k}, \tag{2.8.15}$$

其中

$$\rho_1 = \frac{1}{\mu_1}, \quad \rho_j = \frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}, \quad j \geqslant 2.$$

证　对(2.8.13)式两边关于 s 求一、二阶导数后，再令 $s=0$ 得

$$\omega_{j+1} - \omega_j = \frac{\mu_j}{\lambda_j}(\omega_j - \omega_{j-1}) - \frac{1}{\lambda_j}, \quad j=1,2,3,\cdots, \quad \omega_0=0, \tag{2.8.16}$$

$$g_{j+1} - g_j = \frac{\mu_j}{\lambda_j}(g_j - g_{j-1}) - \frac{2\omega_j}{\lambda_j}, \quad j = 1,2,3,\cdots, \quad g_0 = 0, \tag{2.8.17}$$

(2.8.16) 与引理 2.3.2 中(*) 相同. 由 (2.8.17) 递推得

$$g_{j+1} - g_j = -2\sum_{i=1}^{j} \frac{\omega_i}{\lambda_i} \prod_{k=i+1}^{j} \frac{\mu_k}{\lambda_k} + \frac{g_1}{\lambda_j \rho_j}. \qquad (2.8.18)$$

记

$$h_n = g_{n+1} - g_n, \quad n \geqslant 0, \quad v_n = \frac{h_n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}, \quad n \geqslant 1, \quad v_0 = h_0 = g_1,$$

有

$$\frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n v_n}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = h_n = -\frac{2\omega_n}{\lambda_n} + \frac{\mu_n}{\lambda_n} h_{n-1} = -2\frac{\omega_n}{\lambda_n} + \frac{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n v_{n-1}}{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}.$$

所以,有

$$v_n - v_{n-1} = -\frac{2\omega_n}{\lambda_n} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} < 0, \quad n \geqslant 1.$$

从而 $v_{n-1} - v_n \geqslant 0, n \geqslant 1$,故 $\lim\limits_{n \to \infty} v_n$ 存在.又因

$$v_0 - v_1 = 2\omega_1 \rho_1, \cdots, v_{n-1} - v_n = 2\omega_n \rho_n,$$

所以

$$v_0 - v_n = 2\sum_{i=1}^{n} \omega_i \rho_i$$

$$g_1 = v_0 = \lim_{n \to \infty} v_n + 2\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i$$

又因

$$v_n = \lambda_n h_n \rho_n, \quad \sup_{n \geqslant 0} |\lambda_n| < \infty,$$

以及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i < \infty$, $\therefore \lim\limits_{n \to \infty} \omega_n \rho_n = 0$,又 $M/M/\cdot$ 系统是遍历不可约马氏链,故对任意 n 有

$$0 \leqslant g_n < \infty, g_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} h_i,$$

故 $\sup\limits_{i \geqslant 1} |h_i| < \infty$,从而 $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$,故

$$g_1 = 2\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i, \qquad (2.8.19)$$

即

$$g_1 = E(\theta^2) = 2\sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \rho_i.$$

从而，由 (2.8.19) 式得

$$g_{j+1} - g_j = -2\sum_{i=1}^{j} \frac{\omega_i}{\lambda_i}\prod_{k=i+1}^{j}\frac{\mu_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_j\rho_j}\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i g_i$$

$$g_{j+1} = g_i + \frac{1}{\lambda_j\rho_j}\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\rho_i - 2\sum_{i=1}^{j}\frac{\omega_i}{\lambda_i}\prod_{k=1}^{j}\frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad (2.8.20)$$

即

$$\begin{aligned} g_j &= g_{j-1} - 2\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\omega_i}{\lambda_i}\prod_{k=1}^{j-1}\frac{\mu_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_{j-1}\rho_{j-1}}\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i g_i \\ &= g_1 + g_1\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{2\lambda_i\rho_i} - 2\sum_{m=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\omega_i}{\lambda_i}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{\mu_k}{\lambda_k}. \end{aligned} \quad (2.8.21)$$

2.8.3 M/M/n 系统的忙期分布

这时 $\lambda_j = \lambda,\ j = 0,1,2,\cdots,\mu_j = \begin{cases} n\mu,\ j \geqslant n, \\ j\mu,\ j < n. \end{cases}$

由(2.8.13) 并注意到 $W_n = W_{n-1} + A_0$，且 W_{n-1} 与 A_0 独立，得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{j\mu}{\lambda}[W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_j^*(s), j = 1,2,\cdots,n-1, \\ W_n^*(s) = W_{n-1}^*(s)A_0^*(s), \\ W_0^*(s) = 1, \\ A_0^*(s) = \dfrac{n\mu}{n\mu + \lambda + s - \lambda A_0^*(s)}. \end{cases} \quad (2.8.22)$$

由 (2.8.22) 可解得 $W_1^*(s)[=\theta^*(s)], W_2^*(s), \cdots, W_n^*(s)$.

(i) 对于 M/M/2 系统，由 (2.8.22) 得

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s)A_0^*(s), \\ A_0^*(s) = \dfrac{2\mu}{2\mu + s + \lambda + \lambda A_0^*(s)}. \end{cases} \quad (2.8.23)$$

解之，得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu + s - \lambda A_0^*(s)}, \quad (2.8.24)$$

$$W_2^*(s) = \frac{\mu A_0^*(s)}{\lambda + \mu + s - \lambda A_0^*(s)}. \qquad (2.8.25)$$

由 (2.8.23) 的第三式,得

$$E(A_0) = \frac{1}{2\mu - \lambda}, D(A_0) = \frac{2\mu + \lambda}{(2\mu - \lambda)^3}, 2\mu > \lambda, \quad (2.8.26)$$

由 (2.8.24) 与 (2.8.26) 得

$$E(\theta) = \frac{2}{2\mu - \lambda}, D(\theta) = \frac{4(\mu + \lambda)}{(2\mu - \lambda)^2(\mu - \lambda)}, 2\mu > \lambda, \qquad (2.8.27)$$

$$E(W_2) = \frac{3}{2\mu - \lambda}, D(W_2) = \frac{10\mu + \lambda}{(2\mu - \lambda)^3}, \ 2\mu > \lambda. \qquad (2.8.28)$$

(ii) 对于系统 $M/M/3$,由 (2.8.22) 得

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_3^*(s) = \frac{2\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s), \\ W_3^*(s) = W_2^* \ A_0^*(s), \end{cases} \qquad (2.8.29)$$

其中

$$A_0^*(s) = \frac{3\mu}{3\mu + s + \lambda - \lambda A_0^*(s)}. \qquad (2.8.30)$$

由 (2.8.29),得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu[\lambda + 2\mu + s - \lambda A_0^*(s)]}{(\lambda + \mu + s)[\lambda + 2\mu + s - \lambda A_0^*(s)] - 2\lambda\mu}. \quad (2.8.31)$$

由 (2.8.30) 或 (2.3.32) 得

$$E(A_0) = \frac{1}{3\mu - \lambda}, D(A_0) = \frac{3\mu + \lambda}{(3\mu - \lambda)^3}, \ 3\mu > \lambda, \qquad (2.8.32)$$

由 (2.8.31) 与 (2.8.32) 得

$$E(\theta) = \frac{6\mu + \lambda}{2\mu(3\mu - \lambda)}, \ 3\mu > \lambda. \qquad (2.8.33)$$

由 (2.8.29) ~ (2.8.31) 可求出 $W_2^*(s)$ 与 $W_3^*(s)$.

2.8.4 $M/M/n/n$ 系统忙期的分布

这时, $\lambda_j = \lambda, j = 0,1,2,\cdots$, 当 $j \geqslant n$ 时 $\lambda_j = 0$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j < n, \\ n\mu, & j = n. \end{cases}$$

由(2.8.13)得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \frac{j\mu}{\lambda}[W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_j^*(s), \ j = 1,2,\cdots,n-1, \\ W_n^*(s) = W_{n-1}^*(s)A_0^*(s), \\ W_0^*(s) = 1, \end{cases} \tag{2.8.34}$$

其中

$$A_0^*(s) = \frac{n\mu}{n\mu + s}. \tag{2.8.35}$$

由 (2.8.34) 与 (2.8.35) 可求 $\theta^*(s) = W_1^*(s), W_2^*(s), \cdots, W_n^*(s)$.

(i) 对于 $M/M/2/2$ 系统. 这时 (2.8.34) 与 (2.8.35) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_1^*(s)\frac{2\mu}{2\mu + s} = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s)\frac{2\mu}{2\mu + s}, \end{cases} \tag{2.8.36}$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{2\mu^2 + \mu s}{s^2 + (3\mu + \lambda)s + 2\mu^2}, \tag{2.8.37}$$

$$W_2^*(s) = \frac{2\mu(2\mu^2 + \mu s)}{(2\mu + s)[s^2 + (3\mu + \lambda)s + 2\mu^2]}, \tag{2.8.38}$$

由 (2.8.37) 得

$$E(\theta) = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu^2}, D(\theta) = \frac{4\mu^2 + 5\lambda\mu^2 + \lambda^2 - 2\mu^3 - \lambda\mu^2}{2\mu^4}, \tag{2.8.39}$$

由 (2.8.38) 得

$$E(W_2) = \frac{3\mu + \lambda}{2\mu^2}, D(W_2) = \frac{8\mu^2 + \lambda^2 + 7\lambda\mu}{4\mu^4}. \tag{2.8.40}$$

(ii) 对于 $M/M/3/3$ 系统,这时 (2.8.34) 与 (2.8.35) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \dfrac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \dfrac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_2^*(s)\dfrac{3\mu}{3\mu + s} = \dfrac{2\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \dfrac{s}{\lambda}W_2^*(s), \\ W_3^*(s) = W_2^*(s)\dfrac{3\mu}{3\mu + s}. \end{cases} \tag{2.8.41}$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s)$$

$$= \frac{\mu[s^2 + (\lambda + 5\mu)s + 6\mu^2]}{(\lambda + \mu + s)[s^2 + (\lambda + 5\mu)s + 6\mu^2] - (6\lambda\mu^2 + 2\lambda\mu s)}, \tag{2.8.42}$$

且

$$E(\theta) = \frac{6\mu^2 + 3\lambda\mu + \lambda^2}{6\mu^3}, \tag{2.8.42'}$$

$$D(\theta) = \frac{1}{36\mu^6}(36\mu^4 + 68\lambda\mu^3 + 49\lambda^2\mu^2 + 12\lambda^3\mu + \lambda^4 - 36\lambda^2\mu^3 - 16\lambda^3\mu^2 - 4\lambda^4\mu - 24\lambda\mu^4). \tag{2.8.43}$$

由 (2.8.41) 还可求出 $W_2^*(s)$与 $W_3^*(s)$.

2.8.5 $M/M/n/N(n\leqslant N)$系统的忙期分布

这时$\lambda_j = \begin{cases} \lambda, & j=0,1,\cdots,N-1 \\ 0, & j\geqslant N, \end{cases}$ $\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1,2,\cdots,n-1, \\ n\mu, & j = n, n+1,\cdots,N, \end{cases}$

由(2.8.13) 和引理 2.8.3,得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \dfrac{j\mu}{\lambda}[W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] - \dfrac{s}{\lambda}W_j^*(s), \ j = 1, 2, \cdots, n-1, \\ W_n^*(s) = W_{n-1}^*(s)A_{N0}^*(s), \\ W_0^*(s) = 1, \end{cases} \tag{2.8.44}$$

其中 $A_{N0}^*(s)$ 由 (2.8.7) 给出. 由 (2.8.44) 可解出 $\theta^*(s) = W_1^*(s)$, $W_2^*(s),\cdots,W_n^*(s)$.

(i) 对于 $M/M/1/2$ 系统,这时,(2.8.44) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s)\frac{\mu}{\mu + s}. \end{cases} \tag{2.8.45}$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu(\mu + s)}{(\mu + s)^2 + \lambda s}, \tag{2.8.46}$$

$$W_2^*(s) = \frac{\mu^2}{(\mu + s)^2 + \lambda s}, \tag{2.8.47}$$

且

$$E(\theta) = \frac{\mu + \lambda}{\mu^2},\ D(\theta) = \frac{\lambda^2 + 4\lambda\mu + \mu^2}{\mu^4}, \tag{2.8.48}$$

$$E(W_2) = \frac{2\mu + \lambda}{\mu^2},\ D(W_2) = \frac{2\mu^2 + 4\lambda\mu + \lambda^2}{\mu^4}. \tag{2.8.49}$$

(ii) 对于 $M/M/1/3$ 系统,这时 (2.8.44) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_2^*(s)\frac{\mu}{\mu + s} = \frac{\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_2^*(s). \end{cases} \tag{2.8.50}$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu(\mu + s)^2 + \lambda\mu s}{(\lambda + \mu + s)[(\mu + s)^2 + \lambda s] - \lambda\mu(\mu + s)}, \tag{2.8.51}$$

且

$$E(\theta) = \frac{\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2}{\mu^3}, \tag{2.8.52}$$

(iii) 对于 $M/M/2/3$ 系统,这时 (2.8.44) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \frac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \frac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s)\frac{2\mu(2\mu + s)}{(2\mu + s)^2 + \lambda s}. \end{cases} \tag{2.8.53}$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s)$$

$$= \frac{\mu[(2\mu+s)^2+\lambda s]}{(\lambda+\mu+s)[(2\mu+s)^2+\lambda s]-2\lambda\mu(2\mu+s)}, \tag{2.8.54}$$

$$E(\theta) = \frac{\lambda^2+2\lambda\mu+4\mu^2}{4\mu^3}, \tag{2.8.55}$$

2.8.6 $M/M/n/m/m(n \leqslant m)$ 系统的忙期分布

这时

$$\lambda_j = (m-j)\lambda, \quad j = 0,1,2,\cdots,m$$

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu, & j = 1,2,\cdots,n-1 \\ n\mu, & j = n,n+1,\cdots,m \end{cases}$$

由 (2.8.13) 得

$$\begin{cases} W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \dfrac{j\mu}{(m-j)\lambda}[W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] \\ \quad - \dfrac{s}{(m-j)\lambda}W_j^*(s), \; j = 1,2,\cdots,n-1, \\ W_j^*(s) - W_{j+1}^*(s) = \dfrac{n\mu}{(m-j)\lambda}[W_{j-1}^*(s) - W_j^*(s)] \\ \quad - \dfrac{s}{(m-j)\lambda}W_j^*(s), \; j = n,n+1,\cdots,m-1, \\ W_m^*(s) = W_{m-1}^*(s)\dfrac{n\mu}{n\mu+s}, \\ W_0^*(s) = 1. \end{cases} \tag{2.8.56}$$

由 (2.8.56) 可求 $\theta^*(s) = W_1^*(s), W_2^*(s), \cdots, W_m^*(s)$.

(i) 对于 $M/M/1/2/2$ 系统,这时, (2.8.56) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \dfrac{\mu}{\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \dfrac{s}{\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) = W_1^*(s)\dfrac{\mu}{\mu+s}. \end{cases} \tag{2.8.57}$$

解之,得

$$\theta^*(s) = W_1^*(s) = \frac{\mu(\mu+s)}{(\lambda+\mu+s)(\mu+s)-\lambda\mu}, \qquad (2.8.58)$$

$$E(\theta) = \frac{\lambda+\mu}{\mu^2}.$$

(ii) 对于 $M/M/1/3/3$ 系统,这时 (2.8.56) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \dfrac{\mu}{2\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \dfrac{s}{2\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_3^*(s) = \dfrac{\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \dfrac{s}{\lambda}W_2^*(s), \\ W_3^*(s) = W_2^*(s)\dfrac{\mu}{\mu+s}. \end{cases} \qquad (2.8.59)$$

解之,得

$$\theta^*(s) = \frac{\mu[(\mu+s)^2+\lambda s]}{(2\lambda+\mu+s)[(\mu+s)^2+\lambda s]-2\lambda\mu(\mu+s)}, \qquad (2.8.60)$$

且

$$E(\theta) = \frac{\mu^2+2\lambda\mu+2\lambda^2}{\mu^3}. \qquad (2.8.61)$$

(iii) 对于 $M/M/2/3/3$ 系统,这时 (2.8.56) 变为

$$\begin{cases} W_1^*(s) - W_2^*(s) = \dfrac{\mu}{2\lambda}[1 - W_1^*(s)] - \dfrac{s}{2\lambda}W_1^*(s), \\ W_2^*(s) - W_2^*(s)\dfrac{2\mu}{2\mu+s} = \dfrac{2\mu}{\lambda}[W_1^*(s) - W_2^*(s)] - \dfrac{s}{\lambda}W_2(s). \end{cases} \qquad (2.8.62)$$

解之,得

$$\theta^*(s) = \frac{\mu[(2\mu+s)^2+\lambda s]}{(2\lambda+\mu+s)[(2\mu+s)^2+\lambda s]-4\lambda\mu(2\mu+s)}, \qquad (2.8.63)$$

且

$$E(\theta) = \frac{2\mu^2+2\lambda\mu+\lambda^2}{2\mu^3}. \qquad (2.8.64)$$

第三章　$M/G/1$ 系统

该系统的基本假设是：

(1) 顾客到达间隔时间序列 $\{J_n, n \geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 随机变量序列，且 $J_n \sim \Gamma(1,\lambda)$，$n \geqslant 1$，即系统的输入过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为参数(强度)是 λ 的泊松过程.

(2) 各个顾客的服务时间序列 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 随机变量序列，且 $E(B_n)=\dfrac{1}{\mu}$，$D(B_n)=\sigma^2$，$E(B_n^3)$ 存在有限，B_n 与 B 同分布，其分布函数记为 $B(t)$.

(3) 服务机构只有一个服务台，服务规则(如果不特别说明)为先来先服务(FCFS)等待制. 并设 $\{J_n, n \geqslant 1\}$ 与 $\{B_n, n \geqslant 1\}$ 相互独立.

§3.1　统计平衡队长

3.1.1　嵌入马尔可夫链

设 Q_n 为第 n 个顾客被服务完离开系统时系统中的顾客数(队长)，Y_n 为在第 n 个顾客服务时间 B_n 内到达系统的顾客数，显然有 $Y_n = N(B_n)$. 记

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x \leqslant 0.\end{cases} \tag{3.1.1}$$

由基本假设知，Y_{n+1} 与 Q_n 独立，于是有

$$Q_{n+1}=Q_n-\varepsilon(Q_n)+Y_{n+1}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.1.2}$$

定理 3.1.1　由(3.1.2)式确定的随机序列 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 是齐次马尔可夫链.

证　因为对任意非负整数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$，有

$$P\{Q_{n+1}=k_{n+1}|Q_n=k_n,Q_{n-1}=k_{n-1},\cdots,Q_1=k_1\}$$
$$=P\{Q_n-\varepsilon(Q_n)+Y_{n+1}=k_{n+1}\big|Q_n=k_n,$$
$$Q_{n-1}=k_{n-1}\cdots,Q_1=k_1\}$$
$$=P\{Y_{n+1}=k_{n+1}-k_n+\varepsilon(k_n)\}$$
$$=P\{Q_{n+1}=k_{n+1}\mid Q_n=k_n\},$$

所以$\{Q_n,n\geqslant1\}$是马尔可夫链.又因 $Y_1,Y_2,Y_3,\cdots$相互独立同分布,设

$$p_k=P\{Y_1=k\},\ k=0,1,2,\cdots. \tag{3.1.3}$$

则当 $i>j+1$ 时

$$p_{ij}(n,1)\triangleq P\{Q_{n+1}=j\,|\,Q_n=i\}=P\{Y_{n+1}=j-i+1\}=0.$$

当 $i=0$ 时

$$p_{ij}(n,1)=p\{Q_{n+1}=j\,|\,Q_n=i\}=p\{Y_{n+1}=j\}=p_j.$$

当 $0<i\leqslant j+1$ 时

$$p_{ij}(n,1)=p\{Y_{n+1}=j-i+1\}=p_{j-i+1},$$

即

$$p_{ij}=\begin{cases}p_j, & i=0,j\geqslant0,\\ p_{j-i+1}, & 0<i\leqslant j+1,\\ 0, & i>j+1,\end{cases} \tag{3.1.4}$$

此示 $p_{ij}(n,1)$与 n 无关,故$\{Q_n,n\geqslant1\}$是齐次马尔可夫链.

由(3.1.4)式,$\{Q_n,n\geqslant1\}$的一步转移概率矩阵由(3.1.5)式给出.我们称$\{Q_n,n\geqslant1\}$为 $M/G/1$ 系统的嵌入马尔可夫链.由于$\{Q_n,n\geqslant1\}$的任两状态都相通,故该马尔可夫链是不可约的.

$$p=\begin{bmatrix}p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots\\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \cdots\\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}. \tag{3.1.5}$$

又因 $p_{00}=p_0>0, p_{ii}=p_i>0, i\geqslant 1$，所以 $\{Q_n, n\geqslant 1\}$ 还是非周期的.

定义 3.1.1 如果对任意整数 $k\geqslant 0$，有 $\pi_k\geqslant 0$，且 $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1$，则称数列 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 为概率分布. 如果概率分布 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 满足

$$\pi' = \pi' P, \tag{3.1.6}$$

其中 $\pi'=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots)$，$P$ 为状态空间是 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的离散参数马尔可夫链的一步转移概率矩阵，则称 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 为马尔可夫链的平稳分布.

上定义中的(3.1.6)式等价于下列方程组

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j p_{jk}, \quad k=0,1,2,\cdots. \tag{3.1.7}$$

定理 3.1.2 $M/G/1$ 系统的嵌入马尔可夫链 $\{Q_n, n\geqslant 1\}$ 存在唯一平稳分布 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 的充要条件是 $\rho\triangleq\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，且这时

$$\pi_k = \lim_{n\to\infty}P\{Q_n=k\}, \quad k\geqslant 0. \tag{3.1.8}$$

证 由[2]中第三章§1 定理 1 知，$\{Q_n, n\geqslant 1\}$ 为正常返的 $\Leftrightarrow$ $\rho<1$，再由[2]中第二章定理 2，立证结论.

3.1.2 平均队长

现在来讨论 $M/G/1$ 系统处于平衡状态后的平均队长. 当 $\rho<1$ 时，对于嵌入马尔可夫链 $\{Q_n, n\geqslant 1\}$，由(3.1.2)得

$$E(Q_{n+1}) = E(Q_n) - E[\varepsilon(Q_n)] + E(Y_{n+1}). \tag{3.1.9}$$

记 $E(Q)=\lim\limits_{n\to\infty}E(Q_n)$，因为，$\lim\limits_{n\to\infty}E(Q_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}E(Q_n)$，

$$E(Y_{n+1}) = E[N(B_{n+1})] = \int_0^{\infty}E[N(t)]dB(t) = \int_0^{\infty}\lambda t dB(t) = \rho, \tag{3.1.10}$$

$$E[\varepsilon(Q_n)] = P\{Q_n>0\} = 1-P\{Q_n=0\}. \tag{3.1.11}$$

在(3.1.9)中令 $n\to\infty$ 得

$$1-\lim_{n\to\infty}P\{Q_n=0\}=\rho,$$

即

$$\pi_0 = 1 - \rho. \tag{3.1.12}$$

将(3.1.2)式两边平方再取数学期望，并注意到$[\varepsilon(Q_n)]^2 = \varepsilon(Q_n)$，$Q_n\varepsilon(Q_n) = Q_n$ 且 Y_{n+1}与 Q_n 独立，再令 $n\to\infty$得

$$E(Q^2) = E(Q^2) + E[\varepsilon(Q)] + E(Y^2) - 2E(Q) - 2E(Y)E[\varepsilon(Q)] + 2E(Q)E(Y).$$

解上方程得

$$E(Q) = E[(Y^2) - 2\rho^2 + \rho]/(2 - 2\rho). \tag{3.1.13}$$

又因

$$E(Y^2) = E[N^2(B)] = \int_0^\infty E[N^2(B) \mid B = t]dB(t)$$
$$= \int_0^\infty E[N^2(t)]dB(t) = \int_0^\infty (\lambda^2 t^2 + \lambda t)dB(t)$$
$$= \lambda^2 E(B^2) + \lambda E(B) = \lambda^2\sigma^2 + \rho^2 + \rho, \tag{3.1.14}$$

将(3.1.14)代入(3.1.13)得

$$E(Q) = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}, \quad \rho < 1, \tag{3.1.15}$$

再由利特尔公式得平均逗留时间 $E(T)$：

$$E(T) = \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)}, \quad \rho < 1. \tag{3.1.16}$$

因此平均等待时间 $E(W)$为

$$E(W) = E(T) - E(B) = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)}. \tag{3.1.17}$$

再由利特尔公式，可得平均排队长 $E(Q_q)$

$$E(Q_q) = \lambda E(W) = \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}, \quad \rho < 1. \tag{3.1.18}$$

由(3.1.12)知，服务台被占用的概率，也即顾客到达需要等待的概率为

$$P\{Q > 0\} = \rho. \tag{3.1.19}$$

从而顾客到达不需要等待的概率为 $1 - \rho$.

特别

(1) 对于 $M/D/1$ 系统,因为服务时间为定长$\frac{1}{\mu}$,所以 $\sigma^2=0$. 从而得

$$E(Q)=\frac{2\rho-\rho^2}{2(1-\rho)},E(T)=\frac{1}{\mu}+\frac{\rho^2}{2(1-\rho)\lambda},$$

$$E(W)=\frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)},\ E(Q_q)=\frac{\rho^2}{2(1-\rho)},\quad \rho<1. \tag{3.1.20}$$

(2) 对于 $M/M/1$ 系统,因为 $E(B)=\frac{1}{\mu},\sigma^2=\frac{1}{\mu^2}$,所以

$$E(Q)=\frac{\rho}{1-\rho},E(T)=\frac{1}{\mu-\lambda},E(W)=\frac{\rho}{\mu-\lambda},E(Q)=\frac{\rho^2}{1-\rho},\ \rho<1. \tag{3.1.21}$$

3.1.3 队长的分布

现讨论系统处于平衡后队长的分布. 设 Q_{n+1} 的 PGF 为 $Q_{n+1}(z)$,$B^*(S)$为 B 的 LST,则由(3.1.2)式得

$$Q_{n+1}(z)=E(z^{Q_{n+1}})=E[z^{Q_n-\epsilon(Q_n)}]E(z^{Y_{n+1}}). \tag{3.1.22}$$

因为

$$\begin{aligned}E(z^{Y_{n+1}}) &= E[z^{N(B_{n+1})}] = \int_0^\infty E[z^{N(t)}]dB(t)\\ &= B^*(\lambda-\lambda z),\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

$$\begin{aligned}E[z^{Q_n-\epsilon(Q_n)}] &= P\{Q_n=0\}+\sum_{k=1}^{\infty}z^{k-1}P\{Q_n=k\}\\ &= P\{Q_n=0\}+\frac{1}{z}[Q_n(z)-P\{Q_n=0\}],\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

将(3.1.23)与(3.1.24)代入(3.1.22),再令 $n\to\infty$(记 $Q(z)=\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(z)$)得

$$Q(z)=B^*(\lambda-\lambda z)[1-\rho+\frac{Q(z)-(1-\rho)}{z}]. \tag{3.1.25}$$

解出 $Q(z)$得

$$Q(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{B^*(\lambda-\lambda z)-z},\quad \rho<1.\tag{3.1.26}$$

由于 $B^{*\prime}(0)=-E(B)$, $B^{*\prime\prime}(0)=E(B^2)$, $Q''(1)+Q'(1)=E(Q^2)$, $Q'(1)=E(Q)$利用洛毕达法则可得

$$D(Q)=\frac{\lambda^4[E(B^2)]^2}{4(1-\rho)^2}+\frac{\lambda^3E(B^3)}{3(1-\rho)}+\frac{\lambda^2E(B^2)(3-2\rho)}{2(1-\rho)}+\rho-\rho^2.\tag{3.1.27}$$

特别,对 $M/M/1$ 系统[设 $B\sim\Gamma(1,\mu)$],因为 $E(B)=\frac{1}{\mu}$, $B^*(s)=\frac{\mu}{\mu+s}$,由(3.1.26)式得

$$Q(z)=\frac{1-\rho}{1-\rho z}=(1-\rho)\sum_{k=0}^{\infty}(\rho z)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^kz^k.\tag{3.1.28}$$

所以,队长的平稳分布为

$$P\{Q=k\}=(1-\rho)\rho^k,\quad k=0,1,2,\cdots.\tag{3.1.29}$$

而对 $M/D/1$ 系统,因为服务时间 B 为定长 $\frac{1}{\mu}$, $B^*(s)=e^{-\frac{s}{\mu}}$, $D(B)=0$, 所以由(3.1.26)式,得

$$Q(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)}{1-z\exp[\rho(1-z)]},\quad \rho<1.\tag{3.1.30}$$

对 $Q(z)$关于 z 求 k 阶导数再除以 $k!$ $(k=0,1,2,\cdots)$,并令 $z=0$ 得

$$\begin{cases}P\{Q=0\}=1-\rho,\qquad P\{Q=1\}=(1-\rho)(e^\rho-1),\\ P\{Q=k\}=(1-\rho)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}e^{j\rho}\left[\frac{(j\rho)^{k-j}}{(k-j)!}+(1-\delta_{kj})\frac{(j\rho)^{k-j-1}}{(k-j-1)!}\right],\ k\geqslant 2.\end{cases}\tag{3.1.31}$$

§3.2 等待时间的分布

3.2.1 FCFS 等待时间的分布

对于 $M/G/1$ 系统,设 W 为一个顾客的等待时间,$\rho<1$.因为 Q 恰好等于在 W 与 B 内到达的顾客数,即

$$Q = N(W + B) = N(W) + N(B). \tag{3.2.1}$$

因为

$$\begin{aligned}
Q(z) &= E[z^{N(W+B)}] = \int_0^{\infty} E[z^{N(x+B)} \mid W = x] dP\{W < x\} \\
&= \int_0^{\infty} E[z^{N(x+B)}] dP\{W < x\} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} E[z^{N(x+y)}] dP\{B < y\} dP\{W < x\} \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)(x+y)} dP\{B < y\} dP\{W < x\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} dP\{W < x\} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)y} dP\{B < y\} \\
&= W^*(\lambda - \lambda z) B^*(\lambda - \lambda z),
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中 $W^*(s)$为 W 的 LST.由(3.1.26)式,并令 $\lambda(1-z)=s$,得

$$\frac{(1-\rho)sB^*(s)}{\lambda B^*(s)+s-\lambda} = W^*(s)B^*(s).$$

从而

$$W^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}. \tag{3.2.3}$$

又因

$$W^{*''}(s) = -\lambda(1-\rho) \cdot \frac{sB^{*''}(s)[\lambda B^*(s)+s-\lambda] - 2[1-B^*(s)+sB^{*'}(s)][\lambda B^{*'}(s)+1]}{[\lambda B^*(s)+s-\lambda]^3}, \tag{3.2.4}$$

连续用洛毕达法则三次(令 $s \to 0+0$)得

$$\begin{aligned}
W^{*''}(0) &= \lambda(1-\rho)\frac{3\lambda[B^{*''}(0)]^2 - 2B^{*'''}(0)[1+\lambda B^{*'}(0)]}{6[1+\lambda B^{*'}(0)]^3} \\
&= 2\left[\frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)}\right]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)}.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

由(3.1.17)式得

$$D(W) = \left[\frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)}\right]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)} = [E(W)]^2 + \frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)}, \tag{3.2.6}$$

故逗留时间 S(因 $S = W + B$)的 LST 为

$$S^*(s)=\frac{(1-\rho)sB^*(s)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \tag{3.2.7}$$

且

$$D(S)=\left[\frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)}\right]^2+\frac{\lambda E(B^3)}{3(1-\rho)}+\sigma^2. \tag{3.2.8}$$

因为 $N(W)$ 与 $N(B)$ 相互独立，且

$$\begin{aligned} D[N(B)] &= E[N^2(B)]-E^2[N(B)] \\ &= \lambda E(B)+\lambda^2E(B^2)-\lambda^2E^2(B) \\ &= \lambda E(B)+\lambda^2D(B) \qquad (3.2.9) \\ &= \frac{\lambda}{\mu}+\lambda^2\sigma^2, \qquad (3.2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D[N(W)] &= \lambda E(W)+\lambda^2D(W) \\ &= \frac{\lambda^2E(B^2)}{2(1-\rho)}+\lambda^2\left[\frac{\lambda^2E(B^2)}{2(1-\rho)}\right]^2+\frac{\lambda^3E(B^3)}{3(1-\rho)}. \qquad (3.2.11) \end{aligned}$$

由(3.2.1)式也可得(3.1.27)式.

特别，对于 $M/M/1$ 系统，因为

$$E(B)=\frac{1}{\mu}, D(B)=\frac{1}{\mu^2}, E(B^2)=\frac{2}{\mu^2}, E(B^3)=\frac{6}{\mu^3}, B^*(s)=\frac{\mu}{\mu+s},$$

所以有

$$W^*(s)=1-\rho+\frac{\rho(\mu-\lambda)}{\mu-\lambda+s}. \tag{3.2.12}$$

由拉普拉斯变换的反演公式得 W 的密度函数

$$f_W(t)=\begin{cases}(1-\rho)\delta(t)+\rho(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{3.2.13}$$

3.2.2 先来后服务(FCLS)等待时间的分布

前面讨论的排队系统都是在先来先服务的规则下进行的，但是，在实际问题中往往要考虑先来后服务的情况.例如，存货系统的盘存，以及在某些情况下计算机内部的调试等.显然，“先来先服务”的队长、忙期与“先来后服务”的队长，忙期是相同的，但是，顾客的等待时间是不同的.因此，对先来后服务情况我们只需讨论顾

客等待时间.

当顾客到达系统时,如果系统中无顾客,则他不需等待,立即进入服务,如果系统中有顾客,则他要等待,且等待时间仍记为 W.由于服务规则是先来后服务,所以他的等待时间(与他到达时的队长无关)是两部分之和,第一部分为剩余服务时间 B_+,因为本章只考虑系统处于平稳状态后的结果,当系统处于平稳后,时间 t 将足够长,B_+ 即为剩余服务时间的极限;第二部分为他进入系统后一直到他接受服务前到达系统的所有顾客服务时间之和,即 $\sum_{i=0}^{N(B_+)}\theta_i$,其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ i.i.d,且均与系统 $M/G/1$ 的忙期 θ 同分布,$\theta_0=0$,$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为参数是 λ 的泊松到达过程,即

$$W=B_++\sum_{i=0}^{N(B_+)}\theta_i \quad (\text{当系统处于忙期时}). \tag{3.2.14}$$

故 W 的 LST 为

$$\begin{aligned}
W^*(S)&=E(e^{-sW})=E[e^{-sW}\mid \text{系统处于忙期时}]\rho \\
&\quad+(1-\rho)E[e^{-sW}\mid \text{系统处于闲期时}] \\
&=1-\rho+\rho E\left[e^{-s\left(B_++\sum_{i=1}^{N(B_+)}\theta_i\right)}\right] \\
&=1-\rho+\rho\int_0^\infty e^{-st}E\left[e^{-s\sum_{i=1}^{N(t)}\theta_i}\right]dP\{B_+<t\} \\
&=1-\rho+\rho\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=1}^\infty E\left[e^{-s\sum_{i=1}^{n}\theta_i}\right]P\{N(t)=n\}dP\{B_+<t\} \\
&=1-\rho+\rho\int_0^\infty e^{-st}\sum_{n=1}^\infty[\theta^*(s)]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dP\{B_+<t\} \\
&=1-\rho+\rho\int_0^\infty e^{-[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]t}dP\{B_+<t\} \\
&=1-\rho+\rho B_+^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)] && [\text{由(1.6.30)式}] \\
&=1-\rho+\rho\frac{\mu\{1-B^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]\}}{s+\lambda-\lambda\theta^*(s)} && [\text{由(2.3.29)式}]
\end{aligned}$$

$$= 1 - \rho + \frac{\lambda[1-\theta^*(s)]}{s+\lambda-\lambda\theta^*(s)}. \tag{3.2.15}$$

由(3.2.15)式或(3.2.14)式得

$$E(W) = \rho E[B_+ + \sum_{i=1}^{N(B_+)} \theta_i] = \rho\{E(B_+) + E[N(B_+)]E(\theta)\}$$

$$= \rho\left\{\frac{E(B^2)}{2E(B)} + \frac{\lambda E(B^2)}{2E(B)} \cdot \frac{1}{\mu - \lambda}\right\}$$

$$= \frac{\lambda E(B^2)}{2(1-\rho)}, \quad \rho < 1. \tag{3.2.16}$$

将(3.1.17)式与(3.2.16)式进行比较知,先来先服务平均等待时间与先来后服务平均等待时间是相等的.因为

$$E(W^2 \mid 系统忙) = E\left[B_+^2 + 2B_+ \sum_{i=0}^{N(B_+)} \theta_i + \left(\sum_{i=0}^{N(B_+)} \theta_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{E(B^3)}{3E(B)} + 2\int_0^\infty tE\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right] dP\{B_+ < t\} + \int_0^\infty E\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right]^2 dP\{B_+ < t\}$$

$$= \frac{E(B^3)}{3E(B)} + \frac{2\lambda E(B_+^2)}{\mu - \lambda} + \int_0^\infty \left\{D\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right] + E^2\left[\sum_{i=0}^{N(t)} \theta_i\right]\right\} dP\{B_+ < t\}$$

$$= \frac{E(B^3)}{3E(B)} + \frac{2\lambda E(B_+^2)}{\mu - \lambda} + \lambda E(B_+)D(\theta) + \frac{\lambda E(B_+)}{(\mu-\lambda)^2} + \frac{\lambda^2 E(B_+^2)}{(\mu-\lambda)^2}$$

$$= \frac{\mu^2 E(B_+^2)}{(\mu-\lambda)^2} + \frac{\lambda E(B_+)(\mu^3\sigma^2 + \mu)}{(\mu-\lambda)^3}, \quad \rho < 1,$$

所以

$$D(W) = E(W^2) - E^2(W) = \rho E(W^2 \mid 系统忙) - \frac{\lambda^2 E^2(B^2)}{4(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\mu^3 E(B^3)}{3(\mu-\lambda)^2} + \frac{\lambda\mu(\mu^3\sigma^2 + \mu)E(B^2)}{2(\mu-\lambda)^3} - \frac{\lambda^2[E(B^2)]^2}{4(1-\rho)^2}. \tag{3.2.17}$$

§3.3 $M^\xi/G/1$ 系统

$M^\xi/G/1$ 系统与 $M/G/1$ 系统的区别仅是每次到达的不是一

个顾客，而是 ξ 个顾客. 设 $r=E(\xi)$，$\sigma_r^2=D(\xi)$，ξ 的 PGF 为 $R(Z)$.

设 Q_n 为第 n 个顾客服务完离开系统时系统队长，类似于§3.1的证明，$\{Q_n,n\geqslant 1\}$ 是一个嵌入马氏链，且当 $\rho\triangleq\frac{r\lambda}{\mu}<1$ 时该马氏链存在平稳分布. 因为

$$Q_{n+1}=Q_n-\varepsilon(Q_n)+Y_{n+1}+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)\ , \tag{3.3.1}$$

其中 $\varepsilon(x)$ 仍由(3.1.1)式定义，$Y_{n+1}=X(B_{n+1})$ 为在 B_{n+1} 中到达的顾客数，设 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots$ i.d.d 且均与 ξ 同分布，$\xi_0=0$ 易见

$$E(Y_{n+1})=E(X(B_{n+1}))=\int_0^\infty \gamma\lambda p\{B_{n+1}<t\}=\xi, \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned}
E(z^{Y_{n+1}})&=E[z^{X(B_{n+1})}]=\int_0^\infty E[z^{X(t)}]dP\{B_{n+1}<t\}\\
&=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty E[z^{\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_k}]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dP\{B_{n+1}<t\}\\
&=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty [R(z)]^k e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dP\{B_{n+1}<t\}\\
&=\int_0^\infty e^{-\lambda[1-R(z)]t}dP\{B_{n+1}<t\}\\
&=B^*[\lambda-\lambda R(z)].
\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

3.3.1 平均队长

在 $\rho=\frac{r\lambda}{\mu}<1$ 条件下，对(3.3.1)式两边取数学期望，并令 $n\to\infty$，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}E(Q_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}E(Q_n)\equiv E(Q)$，$\lim\limits_{n\to\infty}E(Y_{n+1})\equiv E(Y)=E[X(B)]$ 与(3.3.2)得

$$E[\varepsilon(Q)]=E[X(B)]+E(\xi-1)E[\varepsilon(1-Q)],$$

即

$$P\{Q>0\}=\rho+(r-1)P\{Q=0\}.$$

因为 $P\{Q\geqslant 0\}=1$，所以得

$$P\{Q=0\}=\frac{1-\rho}{r}. \tag{3.3.4}$$

从而

$$P\{Q>0\}=\frac{r+\rho-1}{r}=E[\varepsilon(Q)]. \qquad (3.3.5)$$

对(3.3.1)式两边平方,注意到

$Q_n\varepsilon(Q_n)=Q_n$, $Q_n\varepsilon(1-Q_n)=\varepsilon(Q_n)\varepsilon(1-Q_n)=0$, $\varepsilon^2(Q_n)=\varepsilon(Q_n)$

得

$$Q_{n+1}^2=Q_n^2+\varepsilon(Q_n)+Y_{n+1}^2+(\xi-1)^2\varepsilon(1-Q_n)-2Q_n$$
$$-2Q_nY_{n+1}-2Y_{n+1}\varepsilon(Q_n)+2Y_{n+1}(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n). \qquad (3.3.6)$$

对上式两边取数学期望,并注意到随机变量的独立性得

$$E(Y_{n+1}^2)=E[X^2(B_{n+1})]=E[X^2(B)]$$
$$=\int_0^\infty E[X^2(t)\mid B=t]dP\{B<t\}$$
$$=\int_0^\infty E[X^2(t)]dP\{B<t\}$$
$$=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty E[X^2(t)\mid N(t)=k]P\{N(t)=k\}dP\{B<t\}$$
$$=\int_0^\infty\sum_{k=0}^\infty E(\sum_{i=0}^k\xi_i)^2e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}dP\{B<t\}$$
$$=\int_0^\infty\sigma_r^2\lambda t+r^2(\lambda t+\lambda^2t^2)dP\{B<t\}$$
$$=(\lambda\sigma_r^2+\lambda r^2)E(B)+\lambda^2r^2E(B^2)$$
$$=r\rho+\rho^2+\lambda^2r^2\sigma^2+\frac{\lambda}{\mu}\sigma_r^2, \qquad (3.3.7)$$

$$E[(\xi-1)^2\varepsilon(1-Q_n)]=(\sigma_r^3+r^2-2r+1)P\{Q_n=0\}, \qquad (3.3.8)$$

$$E[2Q_nY_{n+1}]=2E(Y_{n+1})E(Q_n)=2\rho E(Q_n), \qquad (3.3.9)$$

$$E[2Y_{n+1}\varepsilon(Q_n)]=2\rho P\{Q_n>0\}, \qquad (3.3.10)$$

$$E[2Y_{n+1}(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)]=2\rho(r-1)P\{Q_n=0\}. \qquad (3.3.11)$$

再令 $n\to\infty$,得

$$2(1-\rho)E(Q)=\frac{r+\rho-1}{r}+\frac{\rho\sigma_r^2}{r}+r\rho+\rho^2+\lambda^2r^2\sigma^2$$
$$+(\sigma_r^2+r^2-2r+1)\frac{1-\rho}{r}-\frac{2r\rho-2\rho-2\rho^2}{r}$$
$$+\frac{2r\rho-2\rho-2r\rho^2+2\rho^2}{r}$$
$$=\lambda^2r^2\sigma^2+\rho^2+2\rho(1-\rho)+\frac{\sigma_r^2+r^2-r}{r}.$$

故

$$E(Q)=\rho+\frac{\sigma_r^2+r^2-r}{2r(1-\rho)}+\frac{\lambda^2r^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)},\ \rho<1.\quad(3.3.12)$$

3.3.2 队长的分布

假定先到达的批先服务.由于同批到达的顾客数是随机的,因此,同批顾客的顺序是任意的.设 $Q_n(z)$为 Q_n 的 PGF, $Q(z)=\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(z)$,因为

$$E[z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]=\sum_{k=0}^{\infty}E[z^{k-\varepsilon(k)+(\xi-1)\varepsilon(1-k)}]P\{Q_n=k\}$$
$$=E(z^{\xi-1})P\{Q_n=0\}+\sum_{k=1}^{\infty}z^{k-1}P\{Q_n=k\}$$
$$=\frac{1-\rho}{rz}R(z)+\frac{1}{z}[Q_n(z)-P\{Q_n=0\}].$$
(3.3.13)

由(3.3.3)式得

$$Q(z)=\lim_{n\to\infty}Q_{n+1}(z)=E(z^Y)\lim_{n\to\infty}E[z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]$$
$$=B^*[\lambda-\lambda R(z)]\left\{\frac{1-\rho}{rz}[R(z)-1]+\frac{Q(z)}{z}\right\}.$$
(3.3.14)

解 $Q(z)$得

$$Q(z)=\frac{(1-\rho)[R(z)-1]B^*[\lambda-\lambda R(z)]}{rz-rB^*[\lambda-\lambda R(z)]}.\quad(3.3.15)$$

当 ξ 恒为 1 时,由上式立得(3.1.26)式.

3.3.3 忙期

对 $M^{\xi}/G/1$ 系统来说，忙期有两种不同的含义，第一种含义是：由一批（ξ 个）顾客引出的忙期．它是指：系统本来处于闲期，从系统开始到达一批顾客时起一直到系统中又没有顾客时止这段时间，用 Θ 表示其长．Θ 是 $M^{\xi}/G/1$ 系统得忙期．到达的 ξ 个顾客分别记为 $A_1,A_2,\cdots,A_{\xi}$．由于忙期与服务顺序无关，所以，在讨论忙期时，有时依先来后服务规则处理，即先为 A_1 服务然后为在服务 A_1 期间到达的顾客（这些顾客可视为 A_1 的第一代“子女”）服务，然后为 A_1 的第一代“子女”服务期间到达的顾客（这些顾客可视为 A_1 的第二代“子女”）服务，如此等等，当 A_1 以及其各代“子女”都服务完时，再为 A_2 及其各代“子女”服务，依此类推．由此，又引出第二种忙期，它是指：从开始为一个顾客服务时起一直到该顾客以及其各代“子女”都服务完时止这段时间，用 θ 表示其长．用 $\theta^*(s)$，$\Theta^*(s)$ 分别表示 θ,Θ 的 LST．易见有

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\xi}\theta_i, \tag{3.3.16}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ 相互独立且均与 θ 同分布，从而有

$$\Theta^*(s)=R[\theta^*(s)],（其中 R(z) 为 \xi 的 PGF）. \tag{3.3.17}$$

又因

$$\theta=B+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{N(B)}, \tag{3.3.18}$$

$$\Theta=U+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{N(U)}, \tag{3.3.19}$$

其中 $\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3\cdots$ 相互独立均与 Θ 同分布，$U=\sum\limits_{i=1}^{\xi}B_i$，$B_1,B_2,B_3,\cdots$ 相互独立均与 B 同分布，$N(B)$ 为在 B 中到达的批数．由 (3.3.18) 式得

$$\begin{aligned}\theta^*(s) &= E(e^{-s\theta}),\\ &= E\{e^{-s[B+\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{N(B)}]}\}\\ &= \int_0^{\infty} e^{-st}E\{e^{-s[\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{N(t)}]}\}dP\{B<t\}\end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-[\lambda-\lambda\Theta^*(s)]t} dP\{B < t\} = B^*[s + \lambda - \lambda\Theta^*(s)]$$

$$= B^*[s + \lambda - \lambda R(\theta^*(s))]. \qquad (3.3.20)$$

由(3.3.20)与(3.3.17)式或由(3.3.19)式得

$$\Theta^*(s) = R\{B^*[s + \lambda - \lambda\Theta^*(s)]\}. \qquad (3.3.21)$$

因为

$$E(U) = \frac{r}{\mu},\ D(U) = r\sigma^2 + \frac{\sigma_r^2}{\mu^2}, \qquad (3.3.22)$$

所以,由(3.3.19)式得

$$E(\Theta) = \frac{r}{\mu - r\lambda},\ D(\Theta) = \frac{r^2\rho + \sigma_r^2 + r\mu^2\sigma^2}{\mu^2(1-\rho)^3},\ \rho = \frac{r\lambda}{\mu} < 1. \qquad (3.3.23)$$

由(3.3.16)或(3.3.20)式,得

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu(1-\rho)},\ D(\theta) = \frac{r\mu^2 a^2 + r^2\rho + \rho\,\sigma_r^2}{r\mu^2(1-\rho)^3},\ \rho = \frac{r\lambda}{\mu} < 0. \qquad (3.3.24)$$

设Σ为一个忙期 Θ 中服务完的顾客数,M 为在一个 θ 中服务完的顾客数.$\Sigma(z)$,$M(z)$分别为 $\sum$,M 的 PGF,则易见有

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{\xi} M_i, \qquad (3.3.25)$$

$$M = 1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{N(B)}, \qquad (3.3.26)$$

$$\Sigma = \xi + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_{N(u)}, \qquad (3.3.27)$$

其中 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \cdots$相互独立均与$\Sigma$ 同分布.类似于上述(3.3.17),(3.3.20),(3.3.21) 式的推导得

$$\Sigma(z) = R[M(z)], \qquad (3.3.28)$$

$$M(z) = zB^*\{\lambda - \lambda R[M(z)]\}, \qquad (3.3.29)$$

$$\Sigma(z) = R\{zB^*[\lambda - \lambda\Sigma(z)]\}, \qquad (3.3.30)$$

从而得

$$E(\Sigma) = \frac{r}{1-\rho}, D(\Sigma) = \frac{\sigma_r^2 + \lambda^2 r^3\sigma^2 + r^2\rho}{(1-\rho)^3}, \rho = \frac{r\lambda}{\mu}, \qquad (3.3.31)$$

$$E(M)=\frac{1}{1-\rho},\rho<1, \tag{3.3.32}$$

$$D(\Sigma)=rD(M)+\sigma_r^2\frac{1}{(1-\rho)^2}, \tag{3.3.33}$$

$$D(M)=\frac{\rho\sigma_r^2+\lambda^2r^3\sigma^2+r^2\rho}{r(1-\rho)^3},\ \rho=\frac{r\lambda}{\mu}. \tag{3.3.34}$$

3.3.4 FCFS 规则下的等待时间

用 W 表示 FCFS 规则下的一个顾客的等待时间的长.因为 W 由两部分组成,一部分是该顾客(用 A 表示)所在批的等待时间 W_f,另一部分该顾客在批中的等待时间 W_s,即

$$W=W_f+W_s. \tag{3.3.35}$$

又因 W_f 与 W_s 独立,所以当用 $W^*(s),W_f^*(s),W_s^*(s)$分别表示 W,W_f,W_s 的 LST 时,有

$$W^*(s)=W_f^*(s)W_s^*(s). \tag{3.3.36}$$

又因 $U\equiv\sum_{i=1}^{\xi}B_i$ 的 LST 为

$$U^*(s)=R[B^*(s)]. \tag{3.3.37}$$

将(3.2.3)中的 $B^*(s)$换成 $U^*(s)$立得

$$W_f^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda R[B^*(s)]},\quad \rho=\frac{\lambda r}{\mu}<1. \tag{3.3.38}$$

由(3.1.17)得

$$E(W_f)=\frac{\lambda E(U^2)}{2(1-\rho)}=\frac{\lambda(r\mu^2\sigma^2+\sigma_r^2+r^2)}{2\mu^2(1-\rho)},\quad \rho=\frac{\lambda r}{\mu}. \tag{3.3.39}$$

因为

$$\begin{aligned}E(U^3)&=\sum_{n=1}^{\infty}E(\sum_{i=1}^{n}B_i)^3P\{\xi=n\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E(B_iB_jB_k)P\{\xi=n\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{ nE(B^3) + 3n(n-1)E(B)E(B^2)$$

$$+ (n-2)(n-1)n[E(B)]^3 \} P\{\xi = n\}$$

$$= rE(B^3) + \frac{1}{\mu^3}[3\mu^2\sigma^2(\sigma_r^2 + r^2 - r) + E(\xi^3) - r], \tag{3.3.40}$$

所以由(3.2.6),(3.1.17),(3.3.40)式得

$$D(W_f) = [E(W_f)]^2 + \frac{\lambda}{3(1-\rho)}\{rE(B^3)$$

$$+ \frac{1}{\mu^3}[3\mu^2\sigma^2(\sigma_r^2 + r^2 - r) + E(\xi^3) - r]\},$$

$$\rho = \frac{\lambda r}{\mu} < 1. \tag{3.3.41}$$

现来求 $W_s^*(s)$,因为顾客 A 是一批 ξ 个顾客中任一个顾客,他在批中的位置可以是 ξ 个位置中的任一个位置,又因一批顾客的服务时间为 $U = \sum_{i=1}^{\xi} B_i$,现在 U 中任取一点,该点依概率为 1 落在某个服务时间 B 中,此 B 所在的位置认为就是顾客 A 在批队列中的位置是合理的. 由图 3-1 易见,W_s 与 B 的年龄(逝去时间) B_- 之和等于 U 的年龄 U_-,即

$$U_- = B_- + W_s. \tag{3.3.42}$$

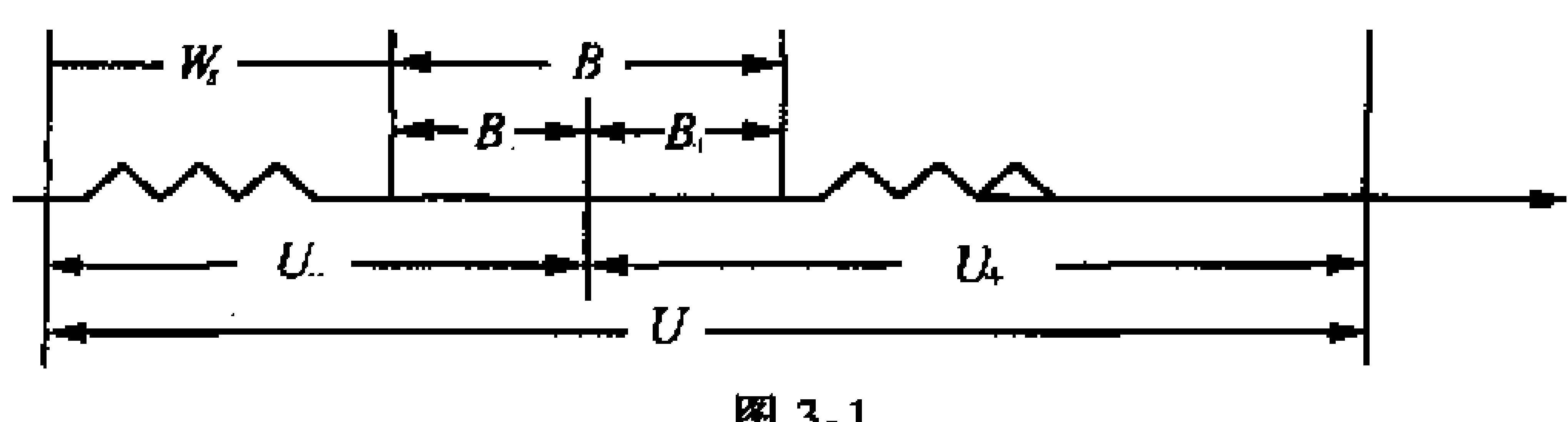


图 3-1

又因 B_- 与 W_s 相互独立,所以 U_- 的 LST 等于 B_-, W_s 的 LST 之积,即

$$U_-^*(s) = B_-^*(s) W_s^*(s). \tag{3.3.43}$$

再由(1.6.30)式得

$$\frac{1-U^*(s)}{sE(U)}=\frac{1-B^*(s)}{sE(B)}W_s^*(s). \qquad (3.3.44)$$

故

$$W_s^*(s)=\frac{1-U^*(s)}{1-B^*(s)}\cdot\frac{E(B)}{E(U)}=\frac{1-R[B^*(s)]}{r[1-B^*(s)]}, \quad (3.3.45)$$

且

$$\begin{aligned} E(W_s) &= E(U_-) - E(B_-) = \frac{E(U^2)}{2E(U)} - \frac{E(B^2)}{2E(B)} \\ &= \frac{r\mu^2\sigma^2+\sigma_r^2+r^2}{2r\mu} - \frac{\mu^2\sigma^2+1}{2\mu} \\ &= \frac{\sigma_r^2+r^2-r}{2r\mu}, \end{aligned} \qquad (3.3.46)$$

$$\begin{aligned} D(W_s) &= D(U_-) - D(B_-) \\ &= \frac{E(U^3)}{3E(U)} - \left[\frac{E(U^2)}{2E(U)}\right]^2 - \frac{E(B^3)}{3E(B)} + \left[\frac{E(B^2)}{2E(B)}\right]^2 \\ &= \frac{E(U^3)-rE(B^3)}{3rE(B)} + \frac{(2r\mu^2\sigma^2+\sigma_r^2+r^2+r)(r-\sigma_r^2-r^2)}{4r^2\mu^2} \end{aligned}$$

$$(3.3.47)$$

由(3.3.36),(3.3.38)与(3.3.45)式得

$$W^*(s)=\frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda R[B^*(s)]}\cdot\frac{1-R[B^*(s)]}{r[1-B^*(s)]}, \quad (3.3.48)$$

且

$$E(W)=E(W_f)+E(W_s)=\frac{\lambda r^2\mu^2\sigma^2+\mu\sigma_r^2+r\mu(r+\rho-1)}{2r\mu^2(1-\rho)}.$$

$$(3.3.49)$$

由图 3-1,设在顾客 A 之前的顾客数为 ξ,则有

$$W_s=\sum_{i=0}^{\xi}B_i, \quad B_0=0. \qquad (3.3.50)$$

记 ξ 的 PGF 为 $\xi(z)$,则得

$$W_s^*(s)=\xi[B^*(s)].$$

由(3.3.45)式得

$$\frac{1-R[B^*(s)]}{r[1-B^*(s)]}=\xi[B^*(s)].$$

令 $B^*(s)=z$,得

$$\xi(z)=\frac{1-R(z)}{r(1-z)}. \tag{3.3.51}$$

由 PGF 的反演公式,得

$$P\{\xi=k\}=\frac{1}{k!}\xi^{(k)}(0)=\frac{P\{\xi>k\}}{r}, k=0,1,2,\cdots, \tag{3.3.52}$$

即在长为 ξ 的队列中任意选一个顾客,则在该顾客之前的顾客数 ξ 的分布由(3.3.52)式给出,ξ 的 PGF 由(3.3.51)式给出,由于 U 的剩余时间 U_+ 与 U 的年龄 U_- 同分布,所以在该顾客之后的顾客数也与 ξ 同分布,由(3.3.52)式知

$$P\{\xi=0\}=\frac{1}{r}=\frac{1}{E(\xi)}. \tag{3.3.53}$$

3.3.5 FCLS 规则下的等待时间

在 $M^{\xi}/G/1$ 系统中,设 W 为一个顾客在非抢占 FCLS 规则下等待时间(的长),则 W 也由两部分组成,一部分为该顾客所在批的等待时间 W_f,另一部分为该顾客在批中的等待时间 W_s,即

$$W=W_f+W_s. \tag{3.3.54}$$

由于 W_f 与 W_s 独立,所以有

$$W^*(s)=W_f^*(s)W_s^*(s), \tag{3.3.55}$$

因为

$$W_f=B_++\Theta_1+\Theta_2+\cdots+\Theta_{N(B_+)},\quad W_f>0, \tag{3.3.56}$$

又因这时有关系式(见图 3-1)

$$U_+=W_s+B_+, \tag{3.3.57}$$

其中 B_+,U_+分别为 B,U 的剩余时间(寿命).由(3.3.56)式得

$$\begin{aligned}W_f^*(s)= & E[e^{-sW_f}\mid 批到达时系统不空]P\{批到达时系统不空\}\\ & +E[e^{-sW_f}\mid 批到达时系统空]P\{批到达时系统空\}.\end{aligned}$$

因为 $\qquad E[e^{-sW_f}\mid 批到达时系统不空]$

$$= E\{e^{-s[B_+ + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(B_+)}]}\}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} E\{e^{-s[\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(t)}]}\} dP\{B_+ < t\}$$

$$= B_+^* [s + \lambda - \lambda\Theta^*(s)]$$

$$= \frac{1 - B^*[s + \lambda - \lambda\Theta^*(s)]}{[S + \lambda - \lambda\Theta^*(s)]E(B)} \qquad [由(3.3.20)]$$

$$= \frac{\mu[1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]}. \tag{3.3.58}$$

记 $p = P\{批到达时系统空\}$,从而得

$$W_f^*(s) = (1 - p)\frac{\mu[1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]} + p. \tag{3.3.59}$$

Cohen[1982]给出 $M_{\xi}/G/1$ 系统任意时刻队长的概率母函数:

$$P(z) = \frac{(1 - \rho)(1 - z)B^*[\lambda - \lambda R(z)]}{B^*[\lambda - \lambda R(z)] - z}. \tag{3.3.60}$$

从而

$$p = P(0) = 1 - \rho. \quad [注意:R(0) = 0], \rho = \frac{\lambda r}{\mu}. \tag{3.3.61}$$

将(3.3.61)代入(3.3.59)得

$$W_f^*(s) = 1 - \rho + \frac{\lambda r[1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]}. \tag{3.3.62}$$

又因 U_+ 与 U_- 同分布,B_+ 与 B_- 同分布,由(3.3.57)式,利用求(3.3.45)式类似的方法得

$$W_s^*(s) = \frac{1 - R[B^*(s)]}{r[1 - B^*(s)]}. \tag{3.3.63}$$

由(3.3.55),(3.3.62),(3.3.63)式得

$$W^*(s) = \frac{(1 - \rho)\{1 - R[B^*(s)]\}}{r[1 - B^*(s)]} + \frac{\lambda[1 - \theta^*(s)]}{s + \lambda - \lambda R[\theta^*(s)]} \cdot \frac{1 - R[B^*(s)]}{1 - B^*(s)}, \tag{3.3.64}$$

且

$$E(W)=E(W_f)+E(W_s)$$
$$=\rho\{E(B_+)+E[N(B_+)]E(\Theta)\}+E(U_+)-E(B_+)$$
$$=\frac{\rho+\rho\mu^2\sigma^2}{2\mu(1-\rho)}+\frac{\sigma_r^2+r^2-r}{2r\mu}. \qquad (3.3.65)$$

§3.4 具有反馈的 $M/G/1$ 系统

在 $M/G/1$ 系统中,设每个顾客每次被服务完后以概率 $1-\alpha$ 立刻排到队尾等待下一次服务,而以概率 $\alpha(0<\alpha\leqslant1)$ 立刻离系统,永不再来,设 ξ 为一个顾客的总的服务次数.易见,ξ 服从参数为 α 的几何分布,即 $\xi\sim\mathrm{Geo}(\alpha)$,从而每个顾客的总的服务时间为 $\sum_{i=1}^{\xi}B_i$,记为 V,即

$$V=\sum_{i=1}^{\xi}B_i, \qquad (3.4.1)$$

其中 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 相互独立同分布,且均于 B 同分布,为使系统的平稳分布存在,本节总假设

$$\rho\triangleq\lambda E(V)=\frac{\lambda}{\alpha\mu}<1. \qquad (3.4.2)$$

3.4.1 队长的分布

设 Q_n 为第 n 个顾客服务完离开系统时系统中的顾客数(队长),L_n 为第 n 个顾客被服务完时(不一定离开系统)系统中的顾客数(队长),A_{n+1} 为第 $n+1$ 个顾客的总服务时间中到达的顾客数.由于服务时间 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 相互独立同分布,所以各个顾客的总服务时间也相互独立分布,且均与 V 同分布,又因每连续服务 ξ 次就有一个顾客离开,故

$$Q_{n+1}=Q_n-\varepsilon(Q_n)+A_{n+1}=Q_n-\varepsilon(Q_n)+N(V). \qquad (3.4.3)$$

又因 V 的 LST 为

$$V^*(s)=E(e^{-sV})=E(e^{-s\sum_{i=1}^{\xi}B_i})=\frac{\alpha B^*(s)}{1-(1-\alpha)B^*(s)}. \tag{3.4.4}$$

A_{n+1}的 PGF 为

$$\begin{aligned}E(z^{A_{n+1}})&=E[z^{N(V)}]=\int_0^\infty E[z^{N(t)}]dP\{V<t\}\\&=\int_0^\infty e^{-(\lambda-\lambda z)t}dP\{V<t\}=V^*(\lambda-\lambda z)\\&=\frac{\alpha B^*(\lambda-\lambda z)}{1-(1-\alpha)B^*(\lambda-\lambda z)}.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

故 Q_{n+1}的 PGF 为

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(z)&=E(z^{A_{n+1}})E[z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)}]\\&=E(z^{A_{n+1}})\{P\{Q_n=0\}+\frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}z^kP\{Q_n=k\}\}\\&=E(z^{A_{n+1}})\{P\{Q_n=0\}+\frac{1}{z}Q_n(z)-\frac{1}{z}P\{Q_n=0\}\}.\end{aligned}$$

记 $Q(z)=\lim_{n\to\infty}Q_n(z),P\{Q=0\}=\lim_{n\to\infty}P\{Q_n=0\}$,令 $n\to\infty$得

$$Q(z)=\frac{\alpha B^*(\lambda-\lambda z)}{1-(1-\alpha)B^*(\lambda-\lambda z)}\{P\{Q=0\}(1-\frac{1}{z})+\frac{1}{z}Q(z)\}.$$

解出 Q(z)得

$$Q(z)=P\{Q=0\}\frac{\alpha(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{[\alpha+(1-\alpha)z]B^*(\lambda-\lambda z)-z}. \tag{3.4.6}$$

令 $z=1$ 得

$$P\{Q=0\}=1-\frac{\lambda}{\alpha\mu}=1-\rho. \tag{3.4.7}$$

从而得

$$Q(z)=\frac{\alpha(1-\rho)(1-z)B^*(\lambda-\lambda z)}{[\alpha+(1-\alpha)z]B^*(\lambda-\lambda z)-z}. \tag{3.4.8}$$

由此得

$$E(Q)\triangleq Q'(1)=\frac{2\rho(1-\alpha\rho)+\lambda\mu\rho E(B^2)}{2(1-\rho)},\ \rho=\frac{\lambda}{\alpha\mu}<1. \tag{3.4.9}$$

因为

$$L_n=\begin{cases}Q_n, & 第\ n\ 个顾客服务完离开系统,\\ Q_n+1, & 第\ n\ 个顾客服务完反馈,\end{cases} \tag{3.4.10}$$

所以

$$\begin{aligned}E(z^{L_n}) &= \alpha E(z^{Q_n})+(1-\alpha)E[z^{Q_n+1}]\\ &= [\alpha+(1-\alpha)z]E(z^{Q_n}).\end{aligned}$$

记 $L(z)=\lim\limits_{n\to\infty}E(z^{L_n})$,令 $n\to\infty$,得

$$L(z)=\frac{\alpha(1-\rho)(1-z)[\alpha+(1-\alpha)z]B^*(\lambda-\lambda z)}{[\alpha+(1-\alpha)z]B^*(\lambda-\lambda z)-z}, \tag{3.4.11}$$

且

$$E(L)=\lim_{n\to\infty}E(L_n)=1-\alpha+E(Q). \tag{3.4.12}$$

3.4.2 忙期

设 θ 为具有反馈的 $M/G/1$ 系统的忙期.由于忙期与服务顺序无关,所以“先来先服务”有时可视为“先来后服务”.当一个顾客(记为 A)到达时,如果系统中没有顾客,服务台将立刻对顾客 A 进行服务,从而忙期开始,当 A 被服务完时,如果不反馈,服务台接着就为服务 A 期间到达的第一个顾客服务(如果有顾客到达的话);如果 A 被服务完时反馈,服务台接着仍为 A 服务,一直到 A 被服务完离开系统,服务台才为服务 A 期间到达的第一个顾客服务,如此等等.于是得

$$\theta=V+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(V)}, \tag{3.4.13}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3\cdots$相互独立均与 θ 同分布.由(3.3.4)式得

$$\begin{aligned}\theta^*(s)\triangleq E(e^{-s\theta}) &= E\{e^{-s[V+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(V)}]}\}\\ &= \int_0^\infty e^{-st}E[e^{-s\sum\limits_{i=0}^{N(t)}\theta_i}]dP\{V<t\} \qquad (3.4.14)\\ &= \int_0^\infty e^{-[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]t}dP\{V<t\}\end{aligned}$$

$$= V^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)] \tag{3.4.15}$$

$$= \frac{\alpha B^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]}{1-(1-\alpha)B^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]}. \tag{3.4.16}$$

因为

$$E(V)=E\left(\sum_{i=1}^{\xi} B_i\right)=E(\xi)E(B)=\frac{1}{\alpha\mu}, \tag{3.4.17}$$

$$D(V)=E(\xi)D(B)+D(\xi)[E(B)]^2=\frac{\sigma^2}{\alpha}+\frac{1-\alpha}{\alpha^2\mu^2}. \tag{3.4.18}$$

再由(3.4.15)式得

$$E(\theta)=\frac{1}{\alpha\mu-\lambda}, \tag{3.4.19}$$

$$D(\theta)=\frac{\alpha\mu(\alpha\mu^2\sigma^2+1-\alpha)+\lambda}{(\alpha\mu-\lambda)^3}. \tag{3.4.20}$$

因 $\pi_0=P\{Q=0\}$, $\lambda_0=\lambda$，则由(3.4.7)与(3.4.19)，有

$$E(\theta)=\frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0}-1\right). \tag{3.4.21}$$

即(2.3.11)式对于 $M/G/1$ 系统与具有反馈的 $M/G/1$ 系统也都成立.

设 M 为在一个忙期 θ 内(服务完)离开系统的顾客数，则类似于(3.4.13)式，有

$$M=1+M_1+M_2+\cdots+M_{N(V)}, \tag{3.4.22}$$

其中 $M_1, M_2, M_3\cdots$ 相互独立均与 M 同分布，于是 M 的 PGF 为

$$M(z)=E(z^M)=zE[z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(V)}}]$$

$$= zV^*[\lambda-\lambda M(z)] \tag{3.4.23}$$

$$= \frac{z\alpha B^*[\lambda-\lambda M(z)]}{1-(1-\alpha)B^*[\lambda-\lambda M(z)]}. \tag{3.4.24}$$

由(3.4.22)得

$$E(M)=\frac{1}{1-\rho}, D(M)=\frac{\rho+\rho^2(\alpha\mu^2\sigma^2+1-\alpha)}{(1-\rho)^3}, \quad \rho=\frac{\lambda}{\alpha\mu}<1. \tag{3.4.25}$$

3.4.3 逗留时间的分布

现讨论具有反馈概率$(1-\alpha)$的 $M/M/1$ 系统逗留时间的分布.设 $B\sim\Gamma(1,\mu)$, T_i 为一个顾客的第 i 次逗留时间, $i=1,2,3,\cdots$易见, $T_1,T_2,T_3,\cdots$相互独立同分布.设 T 为一个顾客的总的逗留时间,由于一个顾客需服务 ξ 次才离开系统,故有

$$T=\sum_{i=1}^{\xi}T_i. \tag{3.4.26}$$

由于在 T_i 中到达系统的顾客数由两部分组成,一部分为 $N(T_i)$,另一部分为反馈的顾客数.又因在 T_i 中每经过时间 B 就有一个顾客被服务完,该顾客以概率$(1-\alpha)$立即排到队尾等待下一次服务,所以在忙期期间,在$[0,t]$中服务完的顾客数 $Y(t)$是参数为 μ 的泊松过程.记

$$X_i=\begin{cases}1,\text{在间隔}[0,t]\text{中服务完的第 } i \text{ 个顾客反馈},\\ 0,\qquad\qquad\text{否则},\end{cases} \tag{3.4.27}$$

$i=1,2,3\cdots$, $X_0=0$,记

$$H(t)=\sum_{i=0}^{Y(t)}X_i,\ t\geqslant 0. \tag{3.4.28}$$

则反馈过程$\{H(t),t\geqslant 0\}$是参数为$(1-\alpha)\mu$ 的泊松过程.令

$$I(t)=N(t)+H(t),t\geqslant 0.$$

则$\{I(t),t\geqslant 0\}$为参数是 $\lambda+(1-\alpha)\mu$ 的泊松过程.从而在 T_i 内到达系统的顾客数为$I(T_i)$,又因 $I(T_i)=L$,所以

$$\begin{aligned}L(z)&=E[z^{I(T_i)}]=\int_0^\infty E[z^{I(t)}]dP\{T_i<t\}\\&=\int_0^\infty e^{-[\lambda+(1-\alpha)\mu](1-z)t}dP\{T_i<t\}\\&=T_i^*[(\lambda+\mu-\alpha\mu)(1-z)].\end{aligned}$$

令$(\lambda+\mu-\alpha\mu)(1-z)=s$,则 $z=\dfrac{\lambda+\mu-\alpha\mu-s}{\lambda+\mu-\alpha\mu}$,由(3.4.11)式得

$$T_1^*(s)= L\left(\frac{\lambda+\mu-\alpha\mu-s}{\lambda+\mu-\alpha\mu}\right)= L\left(\frac{\beta-s}{\beta}\right)$$

$$=\frac{\alpha(1-\rho)s(\beta-s+\alpha s)B^*\left(\frac{\lambda s}{\beta}\right)}{\beta(\beta-s+\alpha s)B^*\left(\frac{\lambda s}{\beta}\right)-\beta(\beta-s)}$$

$$\left(因\ B^*\left(\frac{\lambda s}{\beta}\right)=\frac{\beta\mu}{\beta\mu+\lambda s}\right)$$

$$=\frac{(\mu\alpha-\lambda)(\beta-s+\alpha s)}{\beta\mu\alpha-\beta\lambda+\lambda s}, \tag{3.4.29}$$

其中

$$\beta=\lambda+\mu-\alpha\mu. \tag{3.4.30}$$

由(3.4.26)得 T 的 LST

$$T^*(s)=\frac{\alpha T_1^*(s)}{1-(1-\alpha)T_1^*(s)}=\frac{(\alpha\mu-\lambda)(\beta-s+\alpha s)}{2(\lambda-\alpha\mu)s+\beta\alpha\mu+(\mu-\lambda\alpha+\mu\alpha^2)s}, \tag{3.4.31}$$

$$E(T)=E(\xi)E(T_1)=\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\beta}E(L)\right]=\frac{1}{\alpha\beta}E(L)$$

$$=\frac{1-\alpha}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\beta}E(Q)=\frac{1-\alpha}{\alpha\beta}+\frac{2\rho(1-\alpha\rho)+\lambda\mu\rho E(B^2)}{2\alpha\beta(1-\rho)}$$

$$=\frac{2(1-\alpha+\alpha\rho-\alpha\rho^2)+\lambda\mu\rho E(B^2)}{2\alpha\beta(1-\rho)}$$

$$=\frac{1-\alpha+\alpha\rho}{\alpha\beta(1-\rho)}. \tag{3.4.32}$$

当 $\alpha=1$ 时，即顾客不反馈时，得 $E(T)=\frac{1}{\mu}+\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$. 此与(2.1.44)式相同.

§3.5 优先非抢占的 $M/G/1$ 系统

前面讨论的都是不分优先服务等级的排队系统. 现讨论在实际当中经常碰到的有优先服务权的排队系统.

设 $M/G/1$ 系统有不同优先服务权的 n 类顾客到达，第 i 类

顾客的到达过程$\{N_i(t),t\geqslant 0\}$是参数为λ_i的泊松过程.服务时间为B_i,$E(B_i)=\frac{1}{\mu_i}$,$D(B_i)=\sigma_i^2$,第i类顾客的优先权高于第$i+1$类顾客,$i=1,2,\cdots n-1$,第n类顾客的优先权最低.同类顾客仍依FCFS规则进行服务.有优先权的排队系统一般分为两种:一种叫非抢占系统.另一种叫抢占系统.当优先级高的顾客到达系统后,如果不中断正在服务的优先级低的顾客的服务,而等到他服务完离开后才使用服务台,这就叫非抢占,当优先级高的顾客到达系统后,如果抢占正在接受服务的优先级低的顾客的服务台,这就叫做抢占.本节讨论非抢占$M/G/1$系统.设诸到达过程相互独立,所有服务时间相互独立,同类顾客的服务时间具有相同的分布.

记

$$\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\rho_i=\frac{\lambda_i}{\mu_i},\rho=\sum_{i=1}^{n}\rho_i, \qquad (3.5.1)$$

并记W_i为第i类顾客的等待时间,J_i为第i类顾客到达间隔时间,x_{iq}为新顾客到达时第i类顾客的排队长,$i=1,2,\cdots n$.当系统处于平稳后($\rho<1$),一个第1类顾客的等待时间由两部分组成.一部分为系统的剩余服务时间W_0,当他到达时如果系统中有顾客,则$W_0>0$,否则$W_0=0$;另一部分为他到达时系统中所有第1类顾客的服务时间之和,即$\sum_{j=1}^{X_{1q}}B_{1j}$,其中$B_{1j}$为第一类第$j$个顾客的服务时间,$B_{11},B_{12},B_{13}\cdots$相互独立均与$B_1$同分布.设$\eta_i$为第$i$类顾客的剩余服务时间,由(1.6.30)式得

$$E(\eta_i)=E(B_{i+})=\frac{E(B_i^2)}{2E(B_i)}=\frac{\mu_i E(B_i^2)}{2},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因为任一时刻到达的顾客属于第i类顾客的概率为

$$P\{J_i<\min(J_1,J_2,\cdots,J_{i-1},J_{i+1},\cdots,J_n)\}=\frac{\lambda_i}{\lambda}, \qquad (3.5.2)$$

即服务台为第i类顾客服务的概率为

$$P\{B=B_i\}=\frac{\lambda_i}{\lambda}, \qquad (3.5.3)$$

其中 B 为系统的服务时间,所以服务台被占的概率为

$$\lambda E(B)=\lambda\sum_{i=1}^{n}E(B\mid B=B_i)P\{B=B_i\}$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}E(B_i)P\{B=B_i\}=\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i}\cdot\frac{\lambda_i}{\lambda}=\rho. \tag{3.5.4}$$

故

$$E(B)=\frac{\rho}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\rho_i \tag{3.5.5}$$

$$E(B^2)=\sum_{i=1}^{n}E(B^2\mid B=B_i)P\{B=B_i\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}E(B_i^2)P\{B=B_i\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma_i^2+\frac{1}{\mu_i^2}\right)\frac{\lambda_i}{\lambda}. \tag{3.5.6}$$

从而

$$E(W_0)=\rho E(W_0\mid \text{台被占})=\rho\frac{E(B^2)}{2E(B)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i\sigma_i^2+\frac{\rho_i}{\mu_i}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i E(B_i^2)}{2}=\sum_{i=1}^{n}\rho_i E(\eta_i). \tag{3.5.7}$$

因为

$$W_1=W_0+\sum_{j=1}^{x_{1q}}B_{1j}, \tag{3.5.8}$$

所以由利特尔公式得

$$E(W_1)=E(W_0)+E(x_{1q})E(B_1)=E(W_0)+\frac{1}{\mu_1}E(x_{1q})$$
$$=E(W_0)+\rho_1 E(W_1)=\frac{E(W_0)}{1-\rho_1}. \tag{3.5.9}$$

对第二类顾客而言,有

$$W_2 = W_0 + \sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j} + \sum_{j=1}^{x_{2q}} B_{2j} + \sum_{j=1}^{N_1(W_G)} \theta_{1j}, \quad (3.5.10)$$

其中

$$W_G = W_0 + \sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j} + \sum_{j=1}^{x_{2q}} B_{2j}. \quad (3.5.11)$$

W_0 为第二类一个顾客到达时系统的剩余服务时间，$\sum_{j=1}^{x_{2q}} B_{2j}$ 为系统中第二类顾客的工作量．与 $\sum_{j=1}^{x_{1q}} B_{1j}$ 类似，$\theta_{11},\theta_{12},\theta_{13},\cdots$ 相互独立均与 θ_1 同分布．θ_1 为到达是$\{N_1(t), t \geqslant 0\}$ 服务时间是 B_1 的 $M/G/1$ 系统的忙期，即

$$W_2 = W_G + \sum_{j=1}^{N_1(W_G)} \theta_{1j}. \quad (3.5.12)$$

因为

$$\begin{aligned} E(W_G) &= E(W_0) + \rho_1 E(W_1) + \rho_2 E(W_2) \\ &= \frac{E(W_0)}{1-\rho_1} + \rho_2 E(W_2), \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_{j=0}^{N_1(W_G)} \theta_{1j}\Big) &= \lambda_1 E(W_G) E(\theta_1) = \frac{\lambda_1 E(W_G)}{\mu_1 - \lambda_1} \\ &= \frac{\rho_1 E(W_G)}{1-\rho_1} = \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^2} E(W_0) + \frac{\rho_1 \rho_2 E(W_2)}{1-\rho_1}, \end{aligned}$$

$$(3.5.14)$$

所以

$$E(W_2) = \frac{E(W_0)}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\rho_2 E(W_2)}{1-\rho_1},$$

即

$$E(W_2) = \frac{1}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} E(W_0). \quad (3.5.15)$$

依此类推得

$$E(W_j)=E(W_0)/(1-\sum_{i=1}^{j-1}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{j}\rho_i),\ j=1,2,\cdots,n. \quad (3.5.16)$$

从而由利特尔公式得

$$E(x_{jq})=\lambda_j E(W_j)=\frac{\lambda_j E(W_0)}{(1-\sum_{i=1}^{j-1}\rho_i)(1-\sum_{i=1}^{j}\rho_i)},\ j=1,2,\cdots,n, \quad (3.5.17)$$

$$\begin{cases} E(T_j)=E(W_j)+\dfrac{1}{\mu_j}, \\ E(x_j)=\lambda_j E(W_j)+\rho_j, \end{cases} \quad j=1,2,\cdots,n, \quad (3.5.18)$$

其中 T_j 为第 j 类顾客的逗留时间，x_j 为第 j 类顾客的队长.

第四章　具有假时间的 $M/G/1$ 系统

先介绍以后要用到的几个术语.称服务员不工作或空闲的一段时间为假期.称服务员连续工作的一段时间为工作期.假期与工作期是交替出现的,在任一时刻服务员必处于二者之一.一个假期可以包含若干个假时间,就像一个工作期包含若干个服务时间一样.一般地,一个假期中的假时间的长不一定是独立的或同分布的,一个假期可以在系统不空时开始,但是当假期结束时系统不能是空的.这是因为一个工作期不能在没有信元(顾客)时开始.在两个连续的假时间之间的时间间隔称为一个服务期.在假时间结束时如果无信元在等待,则服务期的长为 0.一个工作期是这样的一个服务期,在这个服务期中至少有一个信元被服务.称两个相继假时间结束点之间的时间间隔为一个服务周期.换句话说,一个服务周期由一个服务期(长度可能为 0)和一个紧接着的假时间组成,由一个假期和一个紧接着的工作期组成的时间间隔称为一个假周期.上述术语及记法见图 4-1.

用 f 表示在每个假时间中到达系统的信元数.用 α 表示在每个假期中到达系统的信元数,α 总是正的,而 f 可以为 0.f 和 α 的概率分布和 PGF 分别记为

$$\begin{cases} f_m \triangleq P\{f = m\}, \quad m = 0,1,2,\cdots, \\ F(Z) \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} Z^m f_m, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

$$\begin{cases} \alpha_m \triangleq P\{\alpha = m\}, \quad m = 1,2,3,\cdots, \\ \alpha(Z) \triangleq \sum_{m=0}^{\infty} Z^m \alpha_m. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

记 L 为一个服务时间结束时系统中的信元数.

L^- 为一个工作期结束时(= 一个假期开始时)系统中的信元

数.

L^+为一个假期结束时(= 一个工作期开始时)系统中的信元数.

$L^\times$为一个服务期结束时(= 一个假时间开始时)系统中的信元数.

L^*为一个假时间结束时(= 一个服务期开始时)系统中的信元数.

显然有

$$L^+ = L^- + \alpha, \tag{4.1.3}$$

$$L^* = L^\times + f. \tag{4.1.4}$$

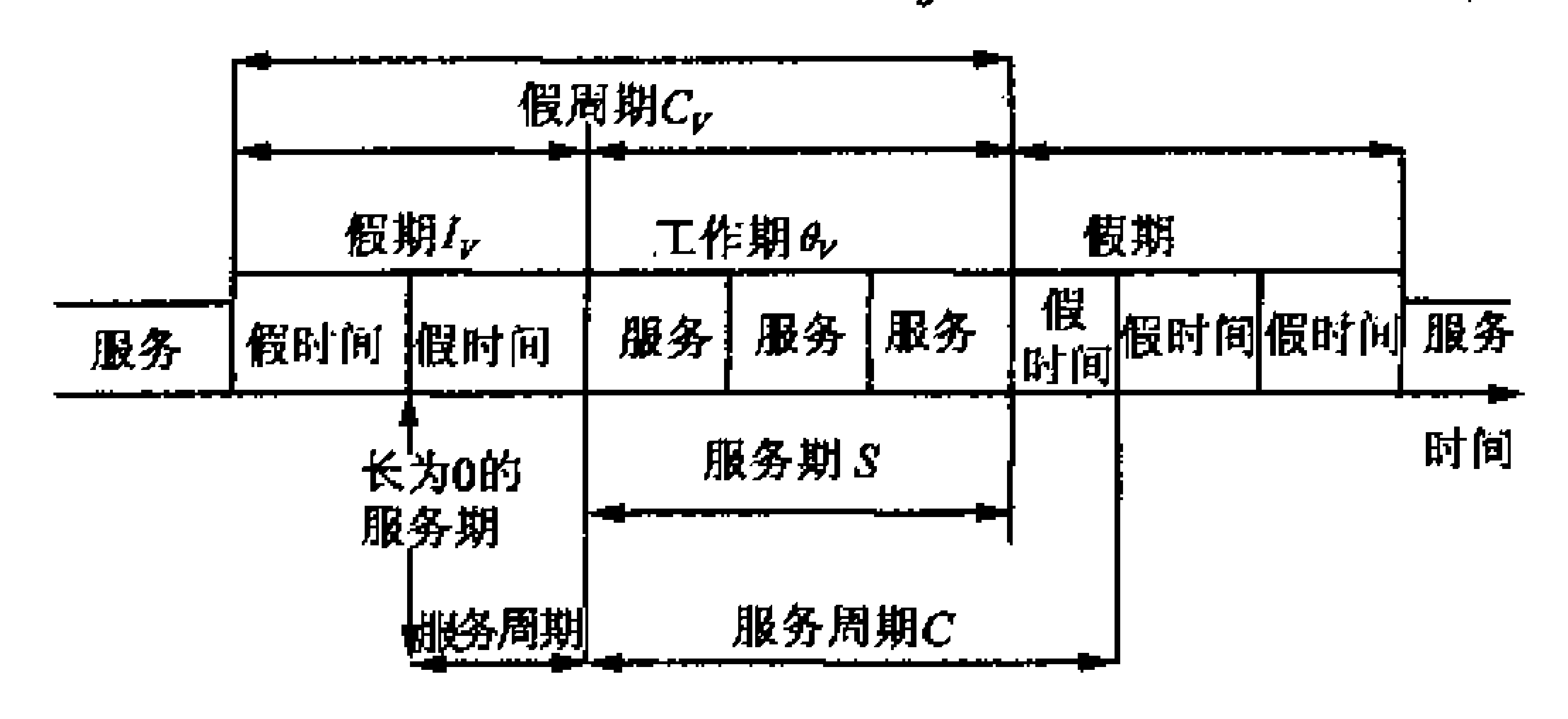


图 4-1　假时间模型术语

为了后面参考方便,上述随机变量的概率分布和其 PGF 列表如下:

随机变量	概率	母函数
L	π_k	$\pi(Z)$
L^-	没用	$H_-(Z)$
L^+	没用	$Q_+(Z)$
$L^\times$	h_k	$H(Z)$
L^*	q_k	$Q(Z)$

对于具有一般假时间的 $M/G/1$ 系统,作如下假设:

(1) 到达系统的信元是具有固定速率的泊松过程,服务时间相互独立同分布.这些服务时间与到达过程独立,与以前假期序列也独立.

(2) 到达系统的所有信元最后都要被服务,即系统可有无限队长容量,信元不成批,不推迟,不放弃(服务).

(3) 信元按照次列服务,这个次序与它们的服务时间独立.

(4) 服务是非抢占的,即一个信元一旦被服务就连续被服务完.

(5) 对于给定的服务员开始与结束假时间的规则不改变泊松到达过程.

§4.1 穷尽服务系统

4.1.1 具有假时间的一般模型

我们先介绍一般假时间穷尽服务,即仅当系统中无信元时假时间才开始的服务规则.由假设,因为 $L^- = 0 = L^\times$,所以 $L^+ = a, L^* = f$.设 L 为一个信元离开系统时系统中的信元数.现来求 L 的平稳分布:$\{\pi_k, k = 0,1,2,\cdots\}$.

设 B, V 分别为服务时间与假时间,B, V 的 LST、均值、i 阶原点矩分别记为 $B^*(s), V^*(s), b, E(V), b^{(i)}, E(V^i)$.设 L_n 为第 n 个信元(顾客)离开系统时系统中的信元数,A_n 为在第 n 个信元服务时间中到达系统的信元数,$n = 1,2,3,\cdots$.因为

$$L_{n+1} = \begin{cases} a + A_{n+1} - 1, L_n = 0, \\ L_n + A_{n+1} - 1, L_n > 0, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

所以

$$\begin{aligned} p_{jk} &\triangleq P\{L_{n+1} = k \mid L_n = j\} \\ &= \begin{cases} P\{a + A_{n+1} - 1 = k\}, j = 0, k \geqslant 0, \\ P\{j + A_{n+1} - 1 = k\}, 0 \leqslant j - 1 \leqslant k, \\ 0, j \geqslant 1, 0 \leqslant k < j - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$
=\begin{cases}\sum_{m=1}^{k+1} a_m a_{k+1-m}, j=0, k\geqslant 0,\\ a_{k+1-j}, 0\leqslant j-1\leqslant k,\\ 0, j\geqslant 1, 0\leqslant k<j-1,\end{cases} \tag{4.1.6}
$$

其中

$a_m = P\{A_{n+1} = m\}$.由平稳方程

$$
\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{jk}, \quad k = 0,1,2,\cdots,
$$

和正规方程:$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$ 得

$$
\pi_k = \pi_0 \sum_{m=1}^{k+1} a_m a_{k+1-m} + \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k+1-j}, \tag{4.1.6'}
$$

得 L 的 PGF

$$
\begin{aligned}
\pi(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k &= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{k+1} a_m a_{k+1-m} Z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k+1} \pi_j a_{k+1-j} Z^k \\
&= \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{k} a_{t+1} a_{k-t} Z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{k} \pi_{t+1} a_{k-t} Z^k \\
&= \pi_0 \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{k=t}^{\infty} a_{t+1} a_{k-t} Z^k + \sum_{t=0}^{\infty} \pi_{t+1} Z^t \sum_{k=t}^{\infty} a_{k-t} Z^{k-t} \\
&= \pi_0 A(Z) \sum_{t=0}^{\infty} a_{t+1} Z^{t+1} \frac{1}{Z} + \frac{A(Z)}{Z} \sum_{t=0}^{\infty} \pi_{t+1} Z^{t+1} \\
&= \pi_0 \frac{A(Z)}{Z} \alpha(Z) + \frac{A(Z)}{Z} [\pi(Z) - \pi_0].
\end{aligned}
$$

解之得

$$
\pi(Z) = \frac{\pi_0 [\alpha(Z) - 1] A(Z)}{Z - A(Z)}, \tag{4.1.7}
$$

又因 $A(Z)$为 $N(B)$的 PGF,

$$
\begin{aligned}
a_k = P\{N(B) = k\} &= \int_0^{\infty} P\{N(t) = k\} dp\{B < t\} \\
&= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dp\{B < t\},
\end{aligned}
$$

所以

$$A(Z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k Z^k = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} Z^k dP\{B < t\}$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t z} dP\{B < t\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} dP\{B < t\}$$
$$= B^*(\lambda - \lambda z). \tag{4.1.8}$$

将(4.1.8)代入(4.1.7)得

$$\pi(Z) = \frac{\pi_0[1 - \alpha(Z)]B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \tag{4.1.9}$$

由 $\pi(1) = 1$,从而得

$$\pi_0 = \frac{1 - \rho}{E(\alpha)}, \qquad 其中\ \rho = \lambda b. \tag{4.1.10}$$

故

$$\pi(Z) = \frac{(1 - \rho)[1 - \alpha(Z)]B^*(\lambda - \lambda Z)}{E(\alpha)[B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]}$$
$$= \alpha_-(Z)\frac{(1 - \rho)(1 - Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}, \tag{4.1.11}$$

其中

$$\alpha_-(Z) = \frac{1 - \alpha(Z)}{E(\alpha)(1 - Z)} \tag{4.1.12}$$

为在一个假期中到达的任一(标记)信元之前到达的信元数的 PGF.而(4.1.11)中第二因式为无假时间的 $M/G/1$ 系统一信元离开时系统中信元数的 PGF.从而得

$$E(L) = \pi(1) = \frac{\alpha^{(2)}(1)}{2E(\alpha)} + \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1 - \rho)} + \rho. \tag{4.1.13}$$

由利特尔公式得信元平均逗留时间:

$$E(T) = E(L)/\lambda = \frac{\alpha^{(2)}(1)}{2\lambda E(\alpha)} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)} + b. \tag{4.1.14}$$

下面讨论等待时间 W 的分布.对于先来先服务规则的具有假时间的 $M/G/1$ 系统,由于

$$L = N(W) + N(B), \tag{4.1.15}$$

所以 W 的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{\lambda(1-\rho)[1-\alpha(1-\frac{s}{\lambda})]}{E(\alpha)[\lambda B^*(s)-\lambda+s]}. \qquad (4.1.16)$$

从而

$$E(W)=\frac{\alpha^{(2)}(1)}{2\lambda E(\alpha)}+\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}, \qquad (4.1.17)$$

$$E(W^2)=\frac{\alpha^{(3)}(1)}{3\lambda^2 E(\alpha)}+\frac{3b^{(3)}}{3(1-\rho)}+\frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2}+\frac{\alpha^{(2)}(1)b^{(2)}}{2(1-\rho)E(\alpha)}. \qquad (4.1.18)$$

现考虑工作期的分布. 设 θ_V, I_V 分别为上述系统的工作期与假期的长, $Q_V^*(s), I_V^*(s)$, 分别为 θ_V, I_V 的 LST. 则服务员在工作的概率为

$$E(\theta_V)/[E(\theta_V)+E(I_v)]=\rho. \qquad (4.1.19)$$

因为

$$\theta_V = \sum_{i=1}^{\alpha}\theta_i, \qquad (4.1.20)$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\cdots$ 独立同分布, 均与无假时间的 $M/G/1$ 系统的忙期 θ 同分布 . 从而有

$$\theta_V^*(s)=\alpha[\theta^*(s)]. \qquad (4.1.21)$$

故

$$E(\theta_V)=E(\alpha)E(\theta)=\frac{bE(\alpha)}{1-\rho}. \qquad (4.1.22)$$

由(4.1.19)得

$$E(I_V)=\frac{1-\rho}{\rho}E(\theta_V)=\frac{E(\alpha)}{\lambda}. \qquad (4.1.23)$$

由于服务期 S 为 $S = \sum_{i=1}^{f}\theta_i$, 所以 S 的 LST 为

$$S^*(s)=F[\theta^*(s)], \qquad (4.1.24)$$

且

$$E(S)=\frac{bE(f)}{1-\rho}. \qquad (4.1.25)$$

因为

$$\frac{E(S)}{E(S)+E(V)}=\rho, \tag{4.1.26}$$

所以

$$E(V)=\frac{E(f)}{\lambda}. \tag{4.1.27}$$

由(4.1.19)知

$$\pi_0 \equiv P\{\text{系统空}\}<P\{\text{服务员在度假}\}=1-\rho. \tag{4.1.28}$$

此示服务员在度假并不意味着系统空.

设 Δ 为两个连续离开间隔时间(在一个服务完成后). 则 Δ 的 LST 为

$$\begin{aligned}\Delta^*(s)&=\pi_0 E[e^{-s\Delta}|\text{系统空}]+(1-\pi_0)E[e^{-s\Delta}|\text{系统不空}]\\&=\pi_0 I_V^*(s)B^*(s)+(1-\pi_0)B^*(s)\\&=B^*(s)[\pi_0 I_V^*(s)+1-\pi_0],\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

且

$$E(\Delta)=\pi_0 E[I_V+B]+(1-\pi_0)E(B)=\pi_0 E(I_V)+b=\frac{1}{\lambda}. \tag{4.1.30}$$

4.1.2 多假时间模型

设每次假时间开始时系统为空. 如果假时间结束时系统不空，服务员立即开始服务，一直到系统中又无信元为止. 如果假时间结束时系统仍为空，服务员立即开始度另一个假时间，并且连续如此一直到某假时间结束时系统至少有一个信元为止，这就是多假时间模型. 并设每个假时间与到达过程独立. 用 $V^*(s)$ 表示假时间 V 的 LST. 因为

$$F(z)=E[Z^{N(V)}]=V^*(\lambda-\lambda Z), \tag{4.1.31}$$

所以

$$f_0\equiv P\{f=0\}=V^*(\lambda). \tag{4.1.32}$$

又因

$$F(Z)=f_0E(Z^f\mid f=0)+(1-f_0)E(Z^f\mid f>0)$$
$$=f_0+(1-f_0)E(Z^a)=f_0+(1-f_0)\alpha(Z),$$

所以

$$\alpha(Z)=\frac{V^*(\lambda-\lambda Z)-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)}=\frac{F(Z)-f_0}{1-f_0}, \quad (4.1.33)$$

$$E(\alpha)=\frac{E(f)}{1-f_0}=\frac{\lambda E(V)}{1-f_0}, \quad (4.1.34)$$

$$\alpha_-(Z)=\frac{1-\alpha(Z)}{(1-Z)E(\alpha)}=\frac{1-V^*(\lambda-\lambda Z)}{\lambda(1-Z)E(V)}. \quad (4.1.35)$$

由(4.1.35)与(4.1.11)得

$$\pi(Z)=\frac{(1-\rho)[1-V^*(\lambda-\lambda Z)]B^*(\lambda-\lambda Z)}{\lambda E(V)[B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]}, \quad (4.1.36)$$

从而

$$W^*(s)=\frac{(1-\rho)[1-V^*(s)]}{E(V)[s-\lambda+\lambda B^*(s)]}=V_-^*(s)W^*_{M/G/1}(s), \quad (4.1.37)$$

其中

$$V_-^*(s)=\frac{1-V^*(s)}{sE(V)}, \quad (4.1.38)$$

$$W^*_{M/G/1}(s)=\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \quad (4.1.39)$$

且

$$E(W)=\frac{E(V^2)}{2E(V)}+\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}, \quad (4.1.40)$$

$$E(W^2)=\frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)}+\frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2}+\frac{\lambda b^{(2)}E(V^2)}{2(1-\rho)E(V)}+\frac{E(V^3)}{3E(V)}. \quad (4.1.41)$$

由(4.1.21)与(4.1.33)得

$$\theta_V^*(s)=\frac{V^*[\lambda-\lambda\theta^*(s)]-V^*(\lambda)}{1-V^*(\lambda)}, \quad (4.1.42)$$

且

$$E(\theta_V)=\frac{\rho E(V)}{(1-\rho)[1-V^*(\lambda)]}. \quad (4.1.43)$$

一个服务期长度 S 的 LST 为

$$S^*(s)=F[\theta^*(s)]=V^*[\lambda-\lambda\theta^*(s)], \quad (4.1.44)$$

且

$$E(S)=E(\sum_{i=1}^{f}\theta_i)=E(f)E(\theta)=\frac{\rho E(V)}{1-\rho}. \quad (4.1.45)$$

假期长度 I_V 的 LST 为

$$\begin{aligned}E(e^{-sI_V}) &= E[E(e^{-sI_V} \mid V_1,V_2,V_3,\cdots)]\\ &= E\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}E[e^{-s(V_1+V_2+\cdots+V_n)} \mid V_1,V_2,V_3,\cdots]\\ &\quad \cdot P\{I_V = V_1+V_2+\cdots+V_n \mid V_1,V_2,V_3\cdots\}\Big\}\\ &= E\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}e^{-s(V_1+V_2+\cdots+V_n)}\cdot e^{-\lambda(V_1+\cdots+V_{n-1})}(1-e^{-\lambda V_n})\Big\}\\ &= \frac{V^*(s)-V^*(s+\lambda)}{1-V^*(s+\lambda)},\end{aligned} \quad (4.1.46)$$

且

$$E(I_V)=\frac{E(V)}{1-V^*(\lambda)}. \quad (4.1.47)$$

4.1.3 单假时间模型

现考虑单假时间穷尽服务 $M/G/1$ 系统.它与上一小节的区别是:如果假时间结束时系统是空的,服务员将处于空闲(而不是度一个假时间)一直到有一个信元到达为止.当一个信元到达时服务员将立即为它服务,一直到系统空才去度另一个假时间.这样的模型被称单假时间穷尽服务 $M/G/1$ 系统.

对这样的模型,在一个假时间中,如果没有信元到达,服务开始时系统中将只有一信元,如果有信元到达,α 将与 f 相等.于是有

$$\alpha(Z)=E(Z^\alpha)=f_0E(Z^\alpha \mid f=0)+\sum_{m=1}^{\infty}E(Z^\alpha \mid f=m)f_m$$

$$=f_0E(Z)+\sum_{m=1}^{\infty}E(Z^f \mid f=m)f_m=f_0Z+F(Z)-f_0. \quad (4.1.48)$$

将上式代入(4.1.11)得一信元离开时系统中信元数的 PGF：

$$\pi(Z)=\frac{1-\rho}{f_0+E(f)}\cdot\frac{[1-F(Z)+(1-Z)f_0]B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}.\tag{4.1.49}$$

因为这时

$$\begin{aligned}E(\alpha)&=f_0E(\alpha\mid f=0)+\sum_{m=1}^{\infty}E(\alpha\mid f=m)f_m\\&=f_0+\sum_{m=1}^{\infty}E(f\mid f=m)f_m=f_0+E(f).\end{aligned}\tag{4.1.50}$$

由(4.1.31)与(4.1.16)得信元等待时间的 LST：

$$W^*(s)=\frac{1-\rho}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}\cdot\frac{\lambda-\lambda V^*(s)+SV^*(\lambda)}{S-\lambda+\lambda B^*(S)},\tag{4.1.51}$$

且

$$E(W)=\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}+\frac{\lambda E(V^2)}{2[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]},\tag{4.1.52}$$

$$E(W^2)=\frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)}+\frac{\lambda E(V^3)}{3[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}+\frac{\lambda b^{(2)}E(W)}{1-\rho},\tag{4.1.53}$$

比较(4.1.52)与(4.1.40)两式知单假时间模型的平均等待时间比多假时间模型的平均等待时间小些.单假时间模型的工作期的 LST 为

$$\begin{aligned}\theta_V^*(s)&=E(e^{-s\theta_V})=\sum_{m=0}^{\infty}E[e^{-s\theta_V}\mid f=m]f_m\\&=f_0E(e^{-s\theta})+\sum_{m=1}^{\infty}E[e^{-s(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)}]f_m\\&=V^*(\lambda)\theta^*(s)+\sum_{m=1}^{\infty}[\theta^*(s)]^m f_m\\&=V^*(\lambda)\theta^*(s)+F[\theta^*(s)]-f_0\\&=V^*(\lambda)[\theta^*(s)-1]+V^*[\lambda-\lambda\theta^*(s)],\end{aligned}\tag{4.1.54}$$

且

$$E(\theta_V)=\frac{b[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}{1-\rho}. \qquad (4.1.55)$$

4.1.4 批到达系统

设每次到达 ξ 个信元. $r,\sigma_r^2,R(Z)$分别为 ξ 的均值、方差、PGF.则对于多假时间 $M^\xi/G/1$ 系统,由(3.3.48)与(4.1.37)信元等待时间 W 的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{1-V^*(s)}{sE(V)}\cdot\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda R[B^*(s)]}\cdot\frac{1-R[B^*(s)]}{r[1-B^*(s)]},$$
$$\rho=\lambda rb, \qquad (4.1.56)$$

且

$$E(W)=\frac{\lambda rb^{(2)}}{2(1-\rho)}+\frac{r^{(2)}b}{2r(1-\rho)}+\frac{E(V^2)}{2E(V)},$$
$$r^{(2)}=E[\xi(\xi-1)]. \qquad (4.1.57)$$

而对于单假时间 $M^\xi/G/1$ 系统,由(3.3.48)与(4.1.51)信元等待时间 W 的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{1-\rho}{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}\cdot\frac{\lambda-\lambda V^*(s)+sV^*(\lambda)}{s-\lambda+\lambda R[B^*(s)]}\cdot\frac{1-R[B^*(s)]}{r[1-B^*(s)]}, \qquad (4.1.58)$$

且

$$E(W)=\frac{\lambda rb^{(2)}}{2(1-\rho)}+\frac{r^{(2)}b}{2r(1-\rho)}+\frac{\lambda E(V^2)}{2[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}, \qquad (4.1.59)$$

其中

$$r^{(2)}=E[\xi(\xi-1)],b^{(2)}=E(B^2).$$

§4.2 门限服务系统

这一节我们考虑具有假时间的门限服务 $M/G/1$ 系统.门限服务是指:当假时间结束时服务员只对正在等待的信元进行服务.

而对在服务期间到达的信元留到下一假时间以后再进行服务，为了后面的需要先来介绍再生周期中的队长.

4.2.1 一个在再生周期中的队长

设 L 为一般服务系统中一个信元离开时系统中的信元数，Φ 为在一个服务期中服务完的信元数.从一个假时间结束(服务期开始)时起到下一个假时间结束(服务期开始)时止这段时间称为一个服务周期，记为 C.如果在一个服务周期开始时系统是空的，则称该时刻为系统的再生点，两个相继再生点之间的时间间隔称为一个再生周期.对于一般服务系统，再生周期的长是独立同分布的，而服务周期的长却不一定是独立同分布的.

设 $X(t)$为在时刻 t 之前再生点的个数(t 的原点设为第 0 个再生点，0 不记入再生点中).设 Y_k 为第 k 个再生周期的"报酬"，且 $E(Y_k)=E(Y_1)$.则到时刻 t 所得报酬为

$$Y(t)=\sum_{k=1}^{X(t)} Y_k, \tag{4.2.1}$$

称 $\{Y(t),t\geqslant 0\}$为一个更新报酬过程.由更新报酬过程理论，有如下结论：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{E[Y(t)]}{t}=\frac{E(Y_1)}{\mu}, \tag{4.2.2}$$

且以概率 1 有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{t}=\frac{E(Y_1)}{\mu}, \tag{4.2.3}$$

其中 μ 为再生周期平均长.

设 M_k 为第 k 个再生周期中服务周期的个数，$k=1,2,\cdots,X(t)$.Φ_{m_k}为第 m_k 个服务周期服务完的信元数，$m_k=1,2,\cdots M_k$.设 $t_{m_k^k}^{n_{m_k}}$为在第 k 个再生周期中的第 m_k 个服务周期中第 n_{m_k} 个服务被完成的时刻.并设 $L(t)$为时刻 t 系统中的信元数.则 L 的 PGF 为

$$\pi(Z)=\lim_{t\to\infty}\frac{E\left\{\sum_{k=1}^{X(t)}\sum_{m_k=1}^{M_k}\sum_{n_{m_k}=1}^{\Phi_{m_k}}Z^{L\left[t_{m_k}^{(n_{m_k})}\right]}\right\}}{E\left[\sum_{k=1}^{X(t)}\sum_{m_k=1}^{M_k}\Phi_{m_k}\right]}$$

$$=\frac{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\left\{\sum_{k=1}^{X(t)}\sum_{m_k=1}^{M_k}\sum_{n_{m_k}=1}^{\Phi_{m_k}}Z^{L\left[t_{m_k}^{(n_{m_k})}\right]}\right\}}{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\left[\sum_{k=1}^{X(t)}\sum_{m_k=1}^{M_k}\Phi_{m_k}\right]}$$

$$=\frac{E\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n_m=1}^{\Phi_m}Z^{L(t_m^{n_m})}\right]}{E\left[\sum_{m=1}^{M}\Phi_m\right]}. \tag{4.2.4}$$

由于再生周期长 i.i.d,故删去 k,且可合理的定义

$$E(\Phi)\triangleq\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{E[\Phi_m]}{n}. \tag{4.2.5}$$

再由(4.2.2)得

$$E(\Phi)=\frac{E\left[\sum_{m=1}^{M}\Phi_m\right]}{E(M)}. \tag{4.2.6}$$

类似地

$$E\left(\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\right)=E\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{n_m=1}^{\Phi_m}Z^{L(t_m^{n_m})}\right]\Big/E(M). \tag{4.2.7}$$

从而得

$$\pi(Z)=E\left[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\right]\Big/E(\Phi). \tag{4.2.8}$$

对于泊松到达过程,(4.2.8) 也是任一时刻系统中信元数的 PGF,且(4.2.8) 不仅对门限服务系统成立,而且对穷尽服务系统非穷尽服务系统也成立.

4.2.2 多假时间模型

设各假时间长仍为独立同分布随机变量. L^* 为每个假时间结束时系统中的信元数. $Q(Z)$ 为 L^* 的 PGF. 因为

$$L^* = L^{\times} + f, \tag{4.2.9}$$

设 $L^{\times}$ 与 f 独立, $H(Z)$ 为 $L^{\times}$ 的 PGF. 则

$$Q(Z) = H(Z)F(Z).$$

对于门限服务, 因为在一个服务期中一个服务期中服务的顾客数 Φ 等于假时间结束时系统中的顾客数 L^*, 即

$$\Phi = L^*, \tag{4.2.10}$$

故

$$E(\Phi) = E(L^*) + Q'(1). \tag{4.2.11}$$

设 L_n 为在一个服务期中第 n 个信元离开时系统中的信元数. A_n 为第 n 个服务时间中到达的信元数. 则

$$L_n = L^* + A_1 + A_2 + \cdots + A_n - n, n = 1,2\cdots, L^*, \tag{4.2.12}$$

其中各个 A_n 是独立同分布的, 且

$$E(Z^{A_n}) = E[Z^{N(B_n)}] = B^*(\lambda - \lambda Z). \tag{4.2.13}$$

从而得

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] &= E\left\{E\sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*-n} \cdot Z^{A_1+A_2+\cdots+A_n} \mid L^*\right\} \\
&= E\left\{\sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*-n} E[Z^{A_1+A_2+\cdots+A_n}]\right\} \\
&= E\left\{\sum_{n=1}^{L^*} Z^{L^*-n}[B^*(\lambda - \lambda Z)]^n\right\} \\
&= E\{[B^*(\lambda - \lambda Z)]^{L^*} - Z^{L^*}\} \cdot \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \\
&= \frac{\{Q[B^*(\lambda - \lambda Z)] - Q(Z)\} B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}.
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

将(4.2.11)与(4.2.14)代入(4.2.8)得

$$\pi(Z)=\frac{\{Q[B^*(\lambda-\lambda Z)]-Q(Z)\}B^*(\lambda-\lambda Z)}{Q'(1)[B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]} \quad (4.2.15)$$

且

$$E(L)=\pi'(1)=\rho+\frac{(1+\rho)Q''(1)}{2Q'(1)}. \quad (4.2.16)$$

对于先来先服务规则.信元等待时间 W 的 LST 为

$$W^*_{\mathrm{FCFS}}(s)=\frac{\lambda\{Q[B^*(s)]-Q(1-s/\lambda)\}}{Q'(1)[s-\lambda+\lambda B^*(s)]}, \quad (4.2.17)$$

且

$$E(W)=\frac{(1+\rho)Q''(1)}{2\lambda Q'(1)}, \quad (4.2.18)$$

$$E(W^2)=\frac{(1+\rho+\rho^2)Q'''(1)}{3\lambda^2Q'(1)}+\frac{b^{(2)}Q''(1)}{2Q'(1)}. \quad (4.2.19)$$

现来确定 $Q(Z)$.由于服务是门限的,所以 $S=\sum_{i=1}^{L^*}B_i$,故

$$S^*(s)=Q[B^*(s)]. \quad (4.2.20)$$

又因 $L^\times$ 的 PGF 为

$$H(Z)=S^*(\lambda-\lambda z), \quad (4.2.21)$$

以及

$$F(Z)=V^*(\lambda-\lambda z), \quad (4.2.22)$$

又 $L^\times$ 与 f 独立,所以

$$Q(Z)=H(Z)F(Z)=Q[B^*(\lambda-\lambda Z)]V^*(\lambda-\lambda z). \quad (4.2.23)$$

从而

$$E(L^*)=Q'(1)=\frac{\lambda E(V)}{1-\rho}, \quad (4.2.24)$$

$$E(S)=bE(L^*)=\frac{\rho E(V)}{1-\rho}. \quad (4.2.25)$$

将(4.2.24)代入(4.2.15)与(4.2.17)得

$$\pi(Z)=\frac{(1-\rho)\{Q[B^*(\lambda-\lambda Z)]-Q(Z)\}B^*(\lambda-\lambda Z)}{\lambda E(V)[B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]}$$

$$= \pi_{M/G/1}(Z) \cdot \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)(1 - Z)} \cdot Q[B^*(\lambda - \lambda Z)], \quad (4.2.26)$$

$$W^*_{\text{FCFS}}(S) = W^*_{M/G/1}(S) \cdot \frac{1 - V^*(S)}{SE(V)} \cdot Q[B^*(S)], \quad (4.2.27)$$

其中

$$\pi_{M/G/1}(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z},$$

$$W^*_{M/G/1}(S) = \frac{S(1-\rho)}{S - \lambda + \lambda B^*(S)}.$$

由(4.2.23)与(4.2.16)可得

$$E(L) = \rho + \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\lambda \rho E(V)}{1-\rho}. \quad (4.2.28)$$

由(4.2.18),(4.2.19)与(4.2.23)可得

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{\rho E(V)}{1-\rho}, \quad (4.2.29)$$

$$E(W^2) = \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)} + \frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^2} + \frac{\lambda b^{(2)} E(V^2)}{2(1-\rho)E(V)} + \frac{E(V^3)}{3E(V)} + \frac{(1+\rho+\rho^2)\lambda E(V) b^{(2)}}{(1-\rho)(1-\rho^2)} + \frac{\rho(1+2\rho)E(V^2)}{1-\rho^2}. \quad (4.2.30)$$

注意:有如下关系式

$$E(W)_{\text{gated}} = E(W)_{\text{exhaustive}} + E(S). \quad (4.2.31)$$

设 $C^*(S)$为服务周期长 C 的 LST.因为 $L^* = N(C)$,所以

$$Q(Z) = C^*(\lambda - \lambda Z). \quad (4.2.32)$$

由(4.2.23)得

$$C^*(s) = Q(1 - s/\lambda) = Q[B^*(s)]V^*(s) = C^*[\lambda - \lambda B^*(s)]V^*(s), \quad (4.2.33)$$

且

$$E(C) = \frac{E(L^*)}{\lambda} = \frac{E(V)}{1-\rho} = E(s) + E(V). \quad (4.2.34)$$

从而(4.2.27)变为

$$W^*_{\mathrm{FCFS}}(S)=\frac{C^*[\lambda-\lambda B^*(s)]-C^*(s)}{E(C)[s-\lambda+\lambda B^*(s)]},\qquad(4.2.35)$$

且

$$E(W)=\frac{(1+\rho)E(C^2)}{2E(C)}$$

$$E(W^2)=\frac{(1+\rho+\rho^2)E(C^3)}{3E(C)}+\frac{\lambda b^{(2)}E(C^2)}{2E(C)},\qquad(4.2.36)$$

其中 $E(C^i)=\frac{1}{\lambda^i}Q^i(1)$ 由(4.2.32)确定.

4.2.3 单假时间模型

在这个模型中服务员在每个工作期后只休一个假时间,在这个假时间结束时,如果系统不空他将立即开始服务,如果系统空,他将处于空闲期,一直到有信元到达为止.设,L^-,L^+分别为前一个工作期结束时和前一个假期结束时系统中的信元数,因为 $L^+=L^-+\alpha=N\left(\sum_{i=1}^{L^+}B_i\right)+\alpha$ 且 L^- 与 α 独立,设 $Q_+(Z)$ 为 L^+ 的 PGF,所以

$$\begin{aligned}Q_+(Z)&=E[Z^{L^-+\alpha}]=E[Z^{L^-}]\alpha(Z)=E[Z^{N(S)}]\alpha(Z)\\&=E\{Z^{N\left(\sum_{i=1}^{L^+}B_i\right)}\}\alpha(Z)\\&=Q_+[B^*(\lambda-\lambda Z)]\alpha(Z)\qquad\text{由}(4.1.48)\\&=Q_+[B^*(\lambda-\lambda Z)][V^*(\lambda-\lambda Z)-V^*(\lambda)\\&\quad+ZV^*(\lambda)].\end{aligned}\qquad(4.2.37)$$

故

$$E(L^*)=E(L^+)=Q'_+(1)=\frac{V^*(\lambda)+\lambda E(V)}{1-\rho},\qquad(4.2.38)$$

$$E(S)=bE(L^*)=bE(L^+)=\frac{b[V^*(\lambda)+\lambda E(V)]}{1-\rho}.\qquad(4.2.39)$$

4.2.4 伯努利门限服务多假时间模型

现在我们考虑多假时间伯努利门限服务 $M/G/1$ 系统.伯努

利门限服务是指：每次假时间结束时服务员服务的信元数 $\Phi\sim B(L^*,p)$，其中 $0<p\leqslant1$，L^* 为该假时间结束时系统中的信元数．即

$$p\{\Phi=k\mid L^*\}=C_{L^*}^k\cdot p^k(1-p)^{L^*-k},\ k=0,1,2,\cdots,L^*. \tag{4.2.40}$$

设 L_n^* 为第 n 个假时间结束时（第 $n+1$ 个服务期开始时）系统中的信元数．于是有

$$L_{n+1}^*=L_n^*+A_1+A_2+\cdots+A_\Phi-\Phi+N(V_{n+1}). \tag{4.2.41}$$

所以

$$E(Z^{L_{n+1}^*})=V^*(\lambda-\lambda Z)E\{E[Z^{L_n^*+A_1+\cdots A_\Phi-\Phi}\mid L_n^*]\}, \tag{4.2.42}$$

而

$$E[Z^{L_n^*+A_1+\cdots A_\Phi-\Phi}\mid L_n^*]=Z^{L_n^*}\sum_{k=0}^{L_n^*}E[Z^{A_1+A_2+\cdots+A_k-k}\mid L_n^*,$$

$$\Phi=k]p\{\Phi=k\mid L_n^*\}=Z^{L_n^*}\sum_{k=0}^{L_n^*}Z^{-k}[B^*(\lambda-\lambda Z)]^kC_{L_n^*}^k p^k(1-p)^{L_n^*-k}$$

$$=Z^{L_n^*}\left[\frac{1}{Z}pB^*(\lambda-\lambda Z)+1-p\right]^{L_n^*}=[pB^*(\lambda-\lambda Z)+(1-p)Z]^{L_n^*}.$$

将上式代入(4.2.42)，令 $n\to\infty$，记 $Q(Z)=\lim\limits_{n\to\infty}E(Z^{L_n^*})$．得

$$Q(Z)=Q[pB^*(\lambda-\lambda Z)+(1-p)Z]V^*(\lambda-\lambda Z) \tag{4.2.43}$$

且

$$E(L^*)=Q'(1)=\frac{\lambda E(V)}{p(1-\rho)}, \tag{4.2.44}$$

$$E(\Phi)=E\{E(\Phi\mid L^*)\}=E\{pL^*\}=\frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \tag{4.2.45}$$

因为

$$L_n=L^*+A_1+A_2+\cdots+A_n-n,\ n=1,2,\cdots,\Phi,$$

所以

$$E[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \mid \Phi] = \sum_{n=1}^{\Phi} E[Z^{L^*} \mid \Phi] Z^{-n}[B^*(\lambda - \lambda Z)]^n$$

$$= E\{\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{-n}[B^*(\lambda - \lambda Z)]^n Z^{L^*} \mid \Phi\}$$

$$= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}$$

$$\cdot E\{[B^*(\lambda - \lambda Z)/Z]^{\Phi} Z^{L^*} - Z^{L^*} \mid \Phi\}.$$

故

$$E[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}] = \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} E\{[B^*(\lambda - \lambda Z)/Z]^{\Phi} Z^{L^*} - Z^{L^*}\}$$

$$= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z} E\{[\frac{pB^*(\lambda - \lambda Z)}{Z} + 1 - p]^{L^*} Z^{L^*} - Z^{L^*}\}$$

$$= \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}\{Q[pB^*(\lambda - \lambda Z) + (1-p)Z] - Q(Z)\}.$$

(4.2.46)

将(4.2.45)与(4.2.46)代入(4.2.8)得一信元离开系统时系统中信元数 L 的 PGF:

$$\pi(Z) = \frac{B^*(\lambda - \lambda Z)}{pQ'(1)[B^*(\lambda - \lambda Z) - Z]}$$

$$\cdot\{Q[pB^*(\lambda - \lambda Z) + (1-p)Z] - Q(Z)\}$$

$$= \frac{Q[pB^*(\lambda - \lambda Z) + (1-p)Z] - Q(Z)}{pQ'(1)(1-\rho)(1-Z)} \cdot \pi_{M/G/1}(Z).$$

(4.2.47)

由此得

$$E(L) = \rho + \frac{(2 - \rho + p\rho)Q''(1)}{2Q'(1)}, \qquad (4.2.48)$$

且(先来先服务)等待时间 W 的 LST 为

$$W^*(s) = \frac{\lambda\{Q[pB^*(s) + (1-p)(1-s/\lambda)] - Q(1-s/\lambda)\}}{pQ'(1)[s - \lambda + \lambda B^*(s)]}.$$

(4.2.49)

从而

$$E(W)=\frac{(2-p+p\rho)Q''(1)}{2\lambda Q'(1)}. \qquad (4.2.50)$$

由(4.2.43)得

$$Q''(1)=\frac{E(V)\lambda^3 b^{(2)}+2\lambda^2[E(V)]^2\rho}{p(1-\rho)^2[2-p+p\rho]}+\frac{2(1-p)\lambda^2[E(V)]^2}{p^2(1-\rho)^2[2-p+p\rho]}$$
$$+\frac{\lambda^2 E(V^2)}{p(1-\rho)[2-p+p\rho]}. \qquad (4.2.51)$$

由(4.2.50),(4.2.51)与(4.2.44)得

$$E(W)=\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}+\frac{\rho E(V)}{(1-\rho)}+\frac{(1-p)E(V)}{p(1-\rho)}+\frac{E(V^2)}{2E(V)}. \qquad (4.2.52)$$

当 $p=1$ 时,上式就变为(4.2.29)式.

4.2.5 具有伯努利反馈的多假时间模型

在多假时间门限服务 $M/G/1$ 系统中,设每信元被服务完后以概率 $1-\sigma(0<\sigma\leqslant 1)$ 立即排列队尾(在下个假时间后它将被服务),而以概率 σ 离开系统.对于这样的系统,记 L^* 的 PGF 为 $Q(Z)$,L_n^* 为第 n 个假时间结束时系统中的信元数.易见

$$Q(Z)=\lim_{n\to\infty}E(Z^{L_n^*})=\lim_{n\to\infty}E(Z^{L_{n+1}^*}).$$

设

$$Y_k=\begin{cases}1, 第\ k\ 个信元反馈,\\ 0, 第\ k\ 个信元不反馈,\end{cases} \qquad k=1,2,\cdots,L_n^*.$$

则有

$$L_{n+1}^*=N\left(\sum_{k=1}^{L_n^*}B_k\right)+\sum_{k=1}^{L_n^*}Y_k+N(V), \qquad (4.2.53)$$

且

$$\begin{aligned}E(Z^{L_{n+1}^*})&=V^*(\lambda-\lambda Z)E\left[Z^{N(\sum_{k=0}^{L_n^*}B_k)+\sum_{k=0}^{L_n^*}Y_k}\right]\\&=V^*(\lambda-\lambda Z)E\{E[Z^{N(B_1+B_2+\cdots+B_{L_n^*})+Y_1+\cdots+Y_{L_n^*}}\mid L_n^*]\}\\&=V^*(\lambda-\lambda Z)E\{[B^*(\lambda-\lambda Z)]^{L_n^*}[(1-\sigma)Z+\sigma]^{L_n^*}\}\end{aligned}$$

$$=E\{[B^*(\lambda-\lambda Z)(Z-\sigma Z+\sigma)]^{L_n^*}\}V^*(\lambda-\lambda Z).\quad(4.2.54)$$

令 $n\to\infty$ 得

$$Q(Z)=Q\{B^*(\lambda-\lambda Z)[(1-\sigma)Z+\sigma]\}V^*(\lambda-\lambda Z),\quad(4.2.55)$$

且

$$E(\Phi)=E(L^*)=Q'(1)=\frac{\lambda E(V)}{\sigma-\lambda b},\quad(4.2.56)$$

$$Q''(1)=\frac{\lambda E(V)[\lambda^2 b^{(2)}+2\lambda b(1-\sigma)]+2\lambda^2[E(V)]^2(1-\sigma+\lambda b)}{(\sigma-\lambda b)^2(2-\sigma+\lambda b)}$$

$$+\frac{\lambda^2 E(V^2)}{(\sigma-\lambda b)(2-\sigma+\lambda b)}.\quad(4.2.57)$$

因为在第 n 个信元服务完成后系统中的信元数 L_n 为

$$L_n=L^*+A_1+A_2+\cdots+A_n-n+\sum_{k=1}^{n}Y_k.\quad(4.2.58)$$

因此

$$E(Z^{L_n}\mid L^*)=Z^{L^*-n}[B^*(\lambda-\lambda Z)]^n[(1-\sigma)Z+\sigma]^n.$$

所以

$$E\Big[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\Big]=E\Big[\sum_{n=1}^{L^*}Z^{L_n}\Big]$$

$$=E\Big\{\sum_{n=1}^{L^*}Z^{L^*}\Big[\frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{Z}(\sigma+Z-\sigma Z)\Big]^n\Big\}$$

$$=\frac{[\sigma+(1-\sigma)Z]B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)[\sigma+(1-\sigma)Z]-Z}$$

$$\cdot\{Q[(\sigma+Z-\sigma Z)B^*(\lambda-\lambda Z)]-Q(Z)\}.$$

$$(4.2.59)$$

将(4.2.59)与(4.2.56)代入(4.2.8)得

$$\pi(Z)=\frac{[\sigma+Z-\sigma Z]B^*(\lambda-\lambda Z)}{[(\sigma+Z-\sigma Z)B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]Q'(1)}$$

$$\cdot\{Q[(\sigma+Z-\sigma Z)B^*(\lambda-\lambda Z)]-Q(Z)\}.\quad(4.2.60)$$

设 $\pi_g(Z)$为一个信元最后离开系统时系统中信元数的 PGF.类似于(3.5.13)式得

$$\pi(Z)=[\sigma+(1-\sigma)Z]\pi_g(Z). \qquad (4.2.61)$$

所以

$$\pi_g(Z)=\frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{E(L^*)[(\sigma+Z-\sigma Z)B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]}$$
$$\cdot\{Q[(\sigma+Z-\sigma Z)B^*(\lambda-\lambda Z)]-Q(Z)\}$$
$$=\pi_{g,M/G/1}(Z)\cdot x(Z), \qquad (4.2.62)$$

其中 $$\pi_{g,M/G/1}(Z)=\frac{(\sigma-\lambda b)(1-Z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{(\sigma+Z-\sigma Z)B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}, \qquad (4.2.63)$$

相应于无假时间具有伯努利反馈的 $M/G/1$ 系统信元服务完离开系统时(既任意时刻)系统中信元数的 PGF. 而

$$x(Z)=\frac{Q\{[\sigma+(1-\sigma)Z]B^*(\lambda-\lambda Z)\}-Q(Z)}{\lambda E(E)(1-Z)}$$

(4.2.64)

为在假时间中任一时刻系统中信元数的 PGF. 由(4.2.63)与利特尔公式得信元平均逗留时间:

$$E(T_g)=\pi'_g(1)/\lambda$$
$$=\frac{2(1-\lambda b)b+\lambda b^{(2)}}{2(\sigma-\lambda b)}+\frac{(1-\sigma+\lambda b)E(V)}{\sigma-\lambda b}+\frac{E(V^2)}{2E(V)}.$$

(4.2.65)

上式右边第一项为无假时间 $M/G/1$ 系统的信元平均逗留时间. 第二项乘 λ 等于$(1-\sigma+\lambda b)E(\Phi)$为假期结束时系统中的平均信元数. 第三项是平均剩余假时间.

4.2.6 LCFS 多假时间模型

(1) 穷尽服务. 设 W 为一个信元的等待时间. 因为对于穷尽服务有

$$W=\begin{cases}\beta_V+\sum_{i=1}^{N(\beta_V)}\theta_i, & \text{当该信元在假时间到达,}\\ \beta_B+\sum_{i=1}^{N(\beta_B)}\theta_i, & \text{当该信元在服务期到达,}\end{cases} \qquad (4.2.66)$$

其中 β_V,β_B 分别为 V,B 的剩余时间.故由(4.2.28)式 W 的 LST 为

$$W^*(s)=(1-\rho)E(e^{-sW}|\text{假时到达})+\rho E(e^{-sW}|\text{服务时到达})$$

$$=(1-\rho)\cdot\frac{1-V^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]}{[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]E(V)}+\rho\frac{1-B^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]}{[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]E(B)}$$

$$=\frac{(1-\rho)\{1-V^*[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]\}}{[s+\lambda-\lambda\theta^*(s)]E(V)}+\frac{\lambda[1-\theta^*(s)]}{s+\lambda-\lambda\theta^*(s)}. \tag{4.2.67}$$

从而

$$E(W)=\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}+\frac{E(V^2)}{2E(V)}, \tag{4.2.68}$$

$$E(W^2)=\frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)^2}+\frac{[\lambda b^{(2)}]^2}{2(1-\rho)^3}+\frac{\lambda b^{(2)}E(V^2)}{2(1-\rho)^2E(V)}$$

$$+\frac{E(V^3)}{3(1-\rho)E(V)}. \tag{4.2.69}$$

(2) 门限服务.因为对于门限服务,有

$$W=\beta_C+\sum_{i=0}^{N(\beta_C)}B_i, \tag{4.2.70}$$

其中 β_C 为服务周期 C 的剩余时间,所以 W 的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{1-C^*[s+\lambda-\lambda B^*(s)]}{E(c)[s+\lambda-\lambda B^*(s)]}, \tag{4.2.71}$$

其中 $C^*(s)$满足(4.2.33),从而

$$E(W)=\frac{(1+\rho)E(C^2)}{2E(C)}, \tag{4.2.72}$$

$$E(W^2)=\frac{(1+\rho)^2E(C^3)}{3E(C)}+\frac{\lambda b^{(2)}E(C^2)}{2E(C)},$$

其中 $E(C^i)=Q^{(i)}(1)/\lambda^i,i=1,2,3,\cdots$,由(4.2.32)给出.

§4.3 有限服务系统

在有限服务系统中,在一个服务期中服务的信元数是有限的.有时候服务期的长度是有限的.有限服务可以分成很多种类.我们

这里仅介绍其中常见的比较简单的几种.

4.3.1 多假时间纯有限服务系统

(1) 在多假时间纯有限服务系统中,服务员每服务一个信元就度一个假时间.当假时间结束时,如果系统中没有信元服务员将度另一个假时间.就这样一直到某个假时间结束时系统中有信元他才又开始工作.设 $V^*(s)$为假时间长度 V 的 LST,各假时间独立同分布. W 为信元的等待时间. $W^*(s)$为 W 的 LST,则对于多假时间纯有限服务的 FCFS(先来先服务)$M/G/1$ 系统,可以视为具有服务时间 $B+V$ 的多假时间穷尽服务的 FCFS $M/G/1$ 系统,由(4.1.37)得

$$W^*(s)=\frac{1-V^*(s)}{sE(V)}\cdot\frac{s[1-\rho-\lambda E(V)]}{s-\lambda+\lambda B^*(s)V^*(s)},\tag{4.3.1}$$

且

$$E(W)=\frac{E(V^2)}{2E(V)}+\frac{\lambda[b^{(2)}+2bE(V)+E(V^2)]}{2[1-\rho-\lambda E(V)]}.\tag{4.3.2}$$

从而信元的平均逗留时间为

$$E(T)=E(W)+b=\frac{1-\rho}{1-\rho-\lambda E(V)}\left[\frac{E(V^2)}{2E(V)}+\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}+b\right].\tag{4.3.3}$$

上右端第二因式为多假时间穷尽服务系统信元的平均逗留时间.

(2) 现在介绍伯努利计划(Bernoulli scheduling)系统,在这个系统中,当服务员服务一个信元后以概率 $1-p$ 休一个假时间,而以概率 p 连续服务下一个信元(如果有信元)$0\leqslant p\leqslant 1$.易见,当 $p=0$ 时该系统即为(多假时间)纯有限服务系统.当 $p=1$ 时该系统即为(多假时间)穷尽服务系统.

令

$$\xi=\begin{cases}V, & \text{休假},\\ 0, & \text{不休假}.\end{cases}\tag{4.3.4}$$

则 $P\{\text{休假}\}=1-p,P\{\text{不休假}\}=p$.

上述的伯努利计划系统可以视为服务时间为 $B+\xi$ 的多假时

间穷尽服务系统.易见 B 与 ξ 独立,且

$$E(B+\xi)=b+(1-p)E(V), \tag{4.3.5}$$

$$E(B+\xi)^2=b^{(2)}+2b(1-p)E(V)+(1-p)E(V^2), \tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned}E[e^{-s(B+\xi)}]&=B^*(s)E(e^{-s\xi})\\&=pB^*(s)+(1-p)B^*(s)V^*(s).\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

由(4.1.37)得(先来先服务规则下)信元等待时间 W 的 LST:

$$W^*(s)=\frac{1-V^*(s)}{2E(V)}\cdot\frac{s[1-\rho-\lambda(1-p)E(V)]}{s-\lambda+\lambda[pB^*(s)+(1-p)B^*(s)V^*(s)]}, \tag{4.3.8}$$

且

$$E(W)=\frac{E(V^2)}{2E(V)}+\frac{\lambda[b^{(2)}+2b(1-p)E(V)+(1-p)E(V^2)]}{2[1-\rho-\lambda(1-p)E(V)]}. \tag{4.3.9}$$

(3) 下面我们考虑假时间不同的有限服务系统.在这个系统中,服务员每服务一个信元就休一个假时间 V,当该假时间结束时,如果系统中无信元.服务员将休一个假时间 V_0.当 V_0 结束时系统中仍无顾客,服务员仍休一个假时间 V_0.V 可以与前一个服务时间相关,但 V_0 与 B,V 独立.设服务时间与其后紧接着的假时间之和为 δ,$\delta^*(s)$为 δ 的 LST,$V_0^*(s)$为 V_0 的 LST,则当服务规则为 FCFS 时,信元等待时间 W 的 LST 为[由(4.1.37)]

$$W^*(s)=\frac{1-V_0^*(s)}{sE(V_0)}\cdot\frac{s[1-\lambda E(\delta)]}{s-\lambda+\lambda\delta^*(s)}, \tag{4.3.10}$$

且

$$E(W)=\frac{E(V_0^2)}{2E(V_0)}+\frac{\lambda E(\delta^2)}{2[1-\lambda E(\delta)]}. \tag{4.3.11}$$

对上述系统,当服务规则为 LCFS 时,由(4.2.6)式信元等待时间 W 的 LST 为

$$W_{\mathrm{LCFS}}^*(s)=\frac{[1-\lambda E(\delta)]\{1-V_0^*[s+\lambda-\lambda\theta_\delta^*(s)]\}}{[s+\lambda-\lambda\theta_\delta^*(s)]E(V_0)}$$

$$+\frac{\lambda[1-\theta_\delta^*(s)]}{s+\lambda-\lambda\theta_\delta^*(s)}, \tag{4.3.12}$$

其中 $\theta_\delta^*(s)$(是 θ_δ 的 LST),θ_δ 为服务时间为 δ 的 $M/G/1$ 系统的忙期)满足

$$\theta_\delta^*(s)=\delta^*[s+\lambda-\lambda\theta_\delta^*(s)]. \tag{4.3.13}$$

由(4.3.12)可得(LCFS 时)信元平均等待时间,它与(4.3.11)式相同.

注意,上述的伯努利计划系统是这样的系统:当 $V_0^*(s)=V^*(s)$ 与 $\delta^*(s)=B^*(s)[p+(1-p)V^*(s)]$时的特殊情形.

(4) 对于假时间不同的有限服务系统,如果到达是成批的,则由(4.1.56),对 FCFS 规则,信元等待时间的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{1-V_0^*(s)}{sE(V_0)}\cdot\frac{s(1-\rho')}{s-\lambda+\lambda R[\delta^*(s)]}\cdot\frac{1-R[\delta^*(s)]}{r[1-\delta^*(s)]},\ \rho'=\lambda rE(\delta), \tag{4.3.14}$$

从而

$$E(W)=\frac{E(V_0^2)}{2E(V_0)}+\frac{\lambda rE(\delta^2)}{2[1-\rho']}+\frac{r^{(2)}E(\delta)}{2r(1-\rho')},\quad \rho'=\lambda rE(\delta). \tag{4.3.15}$$

(5) 对于单假时间纯有限服务系统(即当假时间结束时,如果系统不空,则服务立刻开始,否则服务员成为空闲一直到一个新信元到达为止),可以视为服务时间为 $B+V$ 的一般 $M/G/1$ 系统.由(3.2.3)式,其信元的等待时间 W(FCFS)的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{s[1-\rho-\lambda E(V)]}{s-\lambda+\lambda B^*(s)V^*(s)}, \tag{4.3.16}$$

且

$$E(W)=\frac{\lambda[b^2+2bE(V)+E(V^2)]}{2[1-\rho-\lambda E(V)]}. \tag{4.3.17}$$

4.3.2 最多服务 M 个的有限服务系统

设 L_n^* 为第 n 个假时间结束时系统中的信元数.(在这个系统

中)在紧接第 n 个假时间之后的第 $n+1$ 个服务期中服务员最多服务 M(M 是一个正整数)个信元,即在第 $n+1$ 个服务期 S_{n+1} 中服务 $\Phi=\min(L_n^*,M)$个信元. 显然,当 $M=1$ 时该系统变为纯有限服务系统;当 $M=\infty$时该系统变为门限服务系统.

首先我们注意到,$\{L_n^*,n=1,2,3,\cdots\}$是一个马氏链,且是齐次的. 设 $D_j=V+\sum_{i=1}^{j}B_i,\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$,因为

$$L_{n+1}^*=(L_n^*-M)\varepsilon(L_n^*-M)+N(V+\sum_{i=1}^{\Phi}B_i), \quad (4.3.18)$$

所以$\{L_n^*,n=1,2,3,\cdots\}$的(一步)转移概率为

$$P_{jk}\triangleq P\{L_{n+1}^*=k\mid L_n^*=j\}$$

$$=\begin{cases}P\{j-M+N(D_M)=k\}=P\{N(D_M)=k-j+M\}, & k\geqslant j-M\geqslant 0,\\ P\{N(D_j)=k\},\ j<M,\\ 0,\quad j\geqslant M; \quad k<j-M\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!}dP\{D_M<t\}, \ k\geqslant j-M\geqslant 0,\\ \int_0^\infty e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}dP\{D_j<t\},\ j<M,\\ 0, j\geqslant M,\ k<j-M.\end{cases} \quad (4.3.19)$$

从而上马氏链的平稳分布:

$$q_k=\lim_{n\to\infty}P\{L_n^*=k\},k=0,1,2,\cdots, \quad (4.3.20)$$

为

$$q_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P\{L_n^*=k\mid L_{n-1}^*=j\}P\{L_{n-1}^*=j\}$$

$$=\sum_{j=0}^{M-1}\int_0^\infty\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}dP\{D_j<t\}q_j$$

$$+\sum_{j=M}^{k+M}q_j\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!}dP\{D_M<t\}. \quad (4.3.21)$$

设 $Q(Z)$为平稳分布$\{q_k,k=0,1,2,\cdots\}$的母函数,则

$$
\begin{aligned}
Q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_k Z^k = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^{M-1} q_j \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dP\{D_j < t\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \sum_{j=M}^{k+M} q_j \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-j+M}}{(k-j+M)!} dP\{D_M < t\} \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} q_j \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda Z)t} dP\{D_j < t\} \\
&\quad + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda-\lambda z)} dP\{D_M < t\} \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} q_j D_j^*(\lambda-\lambda Z) + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} D_M^*(\lambda-\lambda Z) \\
&= \sum_{j=0}^{M-1} q_j [B^*(\lambda-\lambda Z)]^j V^*(\lambda-\lambda Z) \\
&\quad + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} [B^*(\lambda-\lambda Z)]^M V^*(\lambda-\lambda Z) \\
&= Q_M[B^*(\lambda-\lambda Z)] V^*(\lambda-\lambda Z) \\
&\quad + \left[\frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{Z}\right]^M V^*(\lambda-\lambda Z)[Q(Z)-Q_M(Z)] \\
&= V^*(\lambda-\lambda Z)\{Q_M[B^*(\lambda-\lambda Z)] \\
&\quad + \left[\frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{Z}\right]^M [Q(Z)-Q_M(Z)]\},
\end{aligned}
\tag{4.3.22}
$$

其中

$$
Q_M(Z) = \sum_{j=0}^{M-1} q_j Z^j. \tag{4.3.23}
$$

从(4.3.22)中解出 $Q(Z)$,得

$$
Q(z) = \frac{\{Z^M Q_M[B^*(\lambda-\lambda Z)] - [B^*(\lambda-\lambda Z)]^M Q_M(Z)\} V^*(\lambda-\lambda Z)}{Z^M - V^*(\lambda-\lambda Z)[B^*(\lambda-\lambda Z)]^M}. \tag{4.3.24}
$$

现来求方程

$$
Z^M - V^*(\lambda-\lambda Z)[B^*(\lambda-\lambda Z)]^M = 0 \tag{4.3.25}
$$

的根数. 在儒歇定理中. 设

$$
f(z) = Z^M, g(z) = -V^*(\lambda-\lambda Z)[B^*(\lambda-\lambda Z)]^M. \tag{4.3.26}
$$

则对充分小的 $\varepsilon>0$,在 $|z|=1+\varepsilon$ 上,有

$$|g(z)| = |V^*(\lambda - \lambda Z)[B^*(\lambda - \lambda Z)]^M| = |E[Z^{N(D_M)}]|$$

$$= |\sum_k Z^k P\{N(D_M = k\}| \leqslant \sum_k |Z|^k g_k \qquad (g_k = p\{D_M = k\})$$

$$= \sum_k g_k (1 + \varepsilon)^k = \sum_k g_k (1 + k\varepsilon) + o(\varepsilon)$$

$$= 1 + \varepsilon E[N(D_M)] + o(\varepsilon)$$

$$= 1 + \varepsilon[\lambda E(V) + M\rho] + o(\varepsilon), \tag{4.3.27}$$

$$|f(z)| = (1 + \varepsilon)^M = 1 + M\varepsilon + o(\varepsilon). \tag{4.3.28}$$

因此,如果

$$\rho + \frac{\lambda}{M} E(V) < 1, \tag{4.3.29}$$

则在 $|z| = 1 + \varepsilon$ 上有 $|f(z) > |g(z)|$,由儒歇定理,在 $|z| = 1 + \varepsilon$ 内,$f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 零点数相同.很清楚,在 $|z| = 1 + \varepsilon$ 内 $f(Z)$ 有 M 个零点.因此,方程(4.3.25)在 $|z| = 1 + \varepsilon$ 内有 M 个根.$Z = 1$ 是其一个根.其它 $M - 1$ 根由第二章的拉格朗日定理可得到.设

$$a = 0, \omega = e^{2\pi mj/M},\ m = 1, 2, \cdots, M - 1,\ j = \sqrt{-1}, \tag{4.3.30}$$

$$g(z) = \{V^*(\lambda - \lambda Z)[B^*(\lambda - \lambda Z)^M]\}^{\frac{1}{M}}, f(z) = z. \tag{4.3.31}$$

注意:当 $m = M$(即对第 M 个根 $Z = 1$)时 ,$\omega = 1$.

由拉格朗日定理,在 $|Z| = 1$ 内方程(4.3.25)的 $M - 1$ 个根为

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi mnj/M}}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}} \{V^*(\lambda - \lambda Z)[B^*(\lambda - \lambda Z)^M]\}^{\frac{n}{M}} |_{z=0},$$
$$m = 1, 2, \cdots, M - 1. \tag{4.3.32}$$

因为 $Q(Z)$ 在 $|z| \leqslant 1$ 中是解析的,(4.3.24)式右边的分子在 $Z = Z_m$ 点也一定是零,$m = 1, 2, \cdots, M - 1$,因此 $\{q_k, k = 0, 1, \cdots, M - 1\}$ 满足如下的线性方程组:

$$\sum_{k=0}^{M-1} q_k \{Z_m^M[B^*(\lambda-\lambda Z_m)]^k-[B^*(\lambda-\lambda Z_m)]^M Z_m^k\}=0,$$

$$m=1,2,\cdots,M-1, \tag{4.3.33}$$

另一个方程由(4.3.24)式和 $Q(1)=1$ 给出：

$$Q'_M(1)=\frac{\lambda E(V)}{1-\rho}-M[1-Q_M(1)], \tag{4.3.34}$$

即

$$\sum_{k=0}^{M-1}(M-k)q_k=M-\frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \tag{4.3.35}$$

这样由(4.3.33)与(4.3.35)我们可以计算 $Q_M(z)$的系数：

$$\{q_k, k=0,1,\cdots,M-1\},$$

由(4.3.24)与(4.3.35)，得

$$\begin{aligned}E(L^*)&=Q'(1)\\&=\frac{\lambda^2E(V^2)+2\lambda E(V)[M-\lambda E(V)]}{2[M(1-\rho)-\lambda E(V)]}\\&\quad+\frac{\lambda^3 b^{(2)}E(V)}{2(1-\rho)[M(1-\rho)-\lambda E(V)]}\\&\quad-\frac{(1-\rho^2)\{Q_M^{(2)}(1)+M(M-1)[1-Q_M(1)]\}}{2[M(1-\rho)-\lambda E(V)]}.\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

现在来求一个信元离开时系统中信元数的 PGF$\pi(Z)$与信元等待时间 W 的 LST$W^*(s)$. 因为在一个服务期服务了的平均信元数为

$$\begin{aligned}E(\Phi)&=\sum_{k=1}^{M-1}kq_k+M\sum_{k=M}^{\infty}q_k\\&=Q'_M(1)+M[1-Q_M(1)] \qquad [\text{由}(4.3.34)]\\&=\frac{\lambda E(V)}{1-\rho}.\end{aligned} \tag{4.3.37}$$

设 L_n, A_n 如 4.2.1 所定义，则有

$$L_n=L^*+A_1+A_2+\cdots+A_n-n,\ n=1,2,\cdots,\ \Phi=\min(L^*,M). \tag{4.3.38}$$

故

$$E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] = E\left\{E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \mid L^*\right]\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L^*-n}[B^*(\lambda-\lambda Z)]^n\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} p\{L^* = k\} \sum_{n=1}^{k} Z^{k-n}[B^*(\lambda-\lambda Z)]^n$$

$$+ \sum_{k=M}^{\infty} P\{L^* = k\} \sum_{n=1}^{M} Z^{k-n}[B^*(\lambda-\lambda Z)]^n$$

$$= \frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}\left\{\sum_{k=0}^{M-1} q_k([B^*(\lambda-\lambda Z)]^k - Z^k)\right.$$

$$\left. + ([B^*(\lambda-\lambda Z)]^M - Z^M)\sum_{k=M}^{\infty} q_k Z^{k-M}\right\}$$

$$= \frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}\left\{Q_M[B^*(\lambda-\lambda Z)] - Q_M(Z)\right.$$

$$\left. + \frac{Q(Z)-Q_M(Z)}{Z^M}([B^*(\lambda-\lambda Z)^M] - Z^M)\right\}$$

$$= \frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}\left\{Q_M[B^*(\lambda-\lambda Z)] - Q(Z)\right.$$

$$\left. + [B^*(\lambda-\lambda Z)]^M \cdot \frac{Q(Z)-Q_M(Z)}{Z^M}\right\}. \quad (4.3.39)$$

将(4.3.37)与(4.3.39)代入(4.2.8)得

$$\pi(Z) = \pi_{M/G/1}(Z)\cdot$$

$$\frac{Q_M[B^*(\lambda-\lambda Z)] + [B^*(\lambda-\lambda Z)/Z]^M[Q(Z)-Q_M(Z)] - Q(Z)}{\lambda E(V)(1-Z)}, \quad (4.3.40)$$

其中

$$\pi_{M/G/1}(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}.$$

由(4.3.22)得

$$\pi(Z) = \pi_{M/G/1}(Z)\alpha_-(Z)\cdot\frac{Q(Z)}{V^*(\lambda-\lambda Z)}, \quad (4.3.41)$$

其中

$$\alpha_{-}(Z)=\frac{1-V^{*}(\lambda-\lambda Z)}{\lambda(1-Z)E(V)}. \tag{4.3.42}$$

当服务规则为 FCFS 时，由(4.3.41)信元等待时间 W 的 LST $W^{*}(s)$满足

$$\pi_{M/G/1}(Z)\alpha_{-}(Z)\frac{Q(Z)}{V^{*}(\lambda-\lambda Z)}=W^{*}(\lambda-\lambda Z)B^{*}(\lambda-\lambda Z).$$

从而

$$\begin{aligned}W^{*}(s)&=\frac{1-\rho}{s-\lambda+\lambda B^{*}(s)}\cdot\frac{1-V^{*}(s)}{E(V)}\cdot\frac{Q(1-\frac{s}{\lambda})}{V^{*}(s)}\\&=W_{M/G/1}^{*}(s)\cdot\frac{1-V^{*}(s)}{sE(V)}\cdot\frac{Q(1-s/\lambda)}{V^{*}(s)},\end{aligned} \tag{4.3.43}$$

而

$$E(W)=\frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}+\frac{E(V^{2})}{2E(V)}+\frac{E(L^{*})}{\lambda}-E(V), \tag{4.3.44}$$

其中 $E(L^{*})$由(4.3.36)给出.因为一个服务期的长 S 为

$$S=\sum_{i=0}^{\Phi}B_{i},\ \Phi=\min(L^{*},M), \tag{4.3.45}$$

所以 S 的 LST 为

$$\begin{aligned}S^{*}(s)&=\sum_{k=0}^{\infty}E(e^{-s\sum_{i=1}^{k}B_{i}})P\{\Phi=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}[B^{*}(s)]^{k}P\{\Phi=k\}\\&=\sum_{k=0}^{M-1}q_{k}[B^{*}(s)]^{k}+\sum_{k=M}^{\infty}q_{k}[B^{*}(s)]^{M}\\&=Q_{M}[B^{*}(s)]+[B^{*}(s)]^{M}[1-Q_{M}(1)].\end{aligned} \tag{4.3.46}$$

所以

$$\begin{aligned}E(S)&=bQ'_{M}(1)+Mb[1-Q_{M}(1)] \qquad [\text{由}(4.3.34)]\\&=\frac{\rho E(V)}{1-\rho}=bE(\Phi).\end{aligned} \tag{4.3.47}$$

注意，(4.3.29)是本小节所论系统的平稳条件.这是因为在一个服务周期中到达的平均信元数(即在一个服务期服务的平均信

元数)必须小于 M.即

$$E[N(S+V)]=\lambda E(s+V)=\lambda[E(S)+E(V)]$$
$$=\lambda\left[\frac{\rho E(V)}{1-\rho}+E(V)\right]=\frac{\lambda E(V)}{1-\rho}<M. \tag{4.3.48}$$

从而得(4.3.29).

§4.4 减少服务系统

在这一节我们考虑另一类服务系统.在这一类服务系统中,每个服务期结束时系统中的信元数总小于等于服务期开始时系统中的信元数.

4.4.1 纯减少服务系统

Takagi 于 1985 年研究了如下的(纯)减少服务系统;在假时间结束时,如果系统有信元,服务就立即开始,且连续服务到(系统中的)信元数比假时间结束时(服务开始时)信元数少一个;如果系统中无信元,服务员立即开始休另一个假时间,如此等等,一直到某个假时间结束时系统中有信元为止.

设 L 为一信元(服务完)离开系统时系统中的信元数.L^* 为假时间结束时系统中的信元数.$\pi(z)$,$Q(z)$分别为 L,L^* 的 PGF.因为对于 L 的分布,关于 FCFS 与 LCFS 是相同的.所以在求 $\pi(z)$,$Q(z)$时,我们假设服务规则为(抢占)LCFS.易见,一当服务开始,该服务期的长就是标准 $M/G/1$ 系统的一个忙期.由于 L 由相互独立的两部分组成.一部分是

$$L^*-1,L^*>0. \tag{4.4.1}$$

因为 L 是一信元离开时系统中的信元数,所以前一个假时间结束时(服务期开始时)系统中的信元数 L^* 必为正.其中 PGF(记为 $\chi(z)$)为

$$\chi(z)=E[Z^{L^*-1}\mid L^*>0]=\sum_{j=1}^{\infty}Z^{j-1}P\{L^*=j\mid L^*>0\}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{j=1}^{\infty} Z^j \cdot \frac{P\{L^* = j\}}{P\{L^* > 0\}} = \frac{Q(Z) - Q(0)}{[1 - Q(0)]Z}. \quad (4.4.2)$$

另一部分是由第一个信元产生的一个忙期中到达和被服务的[按 LCFS 规则服务]信元数，即该信元之前到达和未被服务完的信元数，其 PGF 为

$$\pi_{M/G/1}(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)B^*(\lambda - \lambda Z)}{B^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.3)$$

因为

$$L_{n+1}^* = \begin{cases} L_n^* - 1 + f, & L_n^* > 0, \\ f, & L_n^* = 0 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

且

$$Q(Z) \equiv \lim_{n\to\infty} E[Z^{L_n^*}] = \lim_{n\to\infty} E[Z^{L_{n+1}^*}], E(Z^f) = V(\lambda - \lambda Z),$$

所以

$$Q(Z) = V^*(\lambda - \lambda Z)\left[\frac{Q(Z) - Q(0)}{Z} + Q(0)\right]. \quad (4.4.5)$$

从而

$$Q(Z) = \frac{Q(0)(1-Z)V^*(\lambda - \lambda Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.6)$$

由上式与条件 $Q(1)=1$ 得

$$Q(0) = 1 - \lambda E(V). \quad (4.4.7)$$

故

$$Q(Z) = \frac{[1 - \lambda E(V)](1-Z)V^*(\lambda - \lambda Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z}. \quad (4.4.8)$$

由

(4.4.2)与(4.4.8)得

$$\chi(Z) = \frac{[1 - \lambda E(V)](1-Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z} \cdot \frac{1 - V^*(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)(1-Z)}. \quad (4.4.9)$$

又因

$$L^* = L^{\times} + f, \quad (4.4.10)$$

所以

$$Q(Z) = E(Z^{L^{\times}})E(Z^{f}) = H(Z)V^{*}(\lambda - \lambda Z).$$

故

$$H(z) = \frac{Q(Z)}{V^{*}(\lambda - \lambda Z)} = \frac{(1-Z)[1-\lambda E(V)]}{V^{*}(\lambda - \lambda Z) - Z}. \qquad (4.4.11)$$

从而

$$\chi(Z) = H(Z)\alpha_{-}(Z), \qquad (4.4.12)$$

其中

$$\alpha_{-}(Z) = \frac{1 - V^{*}(\lambda - \lambda Z)}{\lambda E(V)(1 - Z)}. \qquad (4.4.13)$$

为在一个假时间中到达的任一个信元之前到达的信元数的 PGF. 由(4.4.12)与(4.4.3)以及独立性得

$$\pi(Z) = \chi(Z)\cdot\pi_{M/G/1}(Z) = H(Z)\alpha_{-}(Z)\pi_{M/G/1}(Z). \qquad (4.4.14)$$

对 FCFS 规则,由(4.4.14)得信元等待时间 W 的 LST:

$$W^{*}(s) = \frac{1 - V^{*}(s)}{sE(V)}\cdot\frac{s[1-\lambda E(V)]}{s - \lambda + \lambda V^{*}(s)}\cdot\frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^{*}(s)}, \qquad (4.4.15)$$

且

$$E(W) = \frac{E(V^{2})}{2E(V)[1 - \lambda E(V)]} + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1 - \rho)}. \qquad (4.4.16)$$

4.4.2 一般减少服务系统

纯减少服务系统可以推广到如下的一般减少服务系统:服务员一当进行服务,他就一直服务到:(1) 系统中的信元比假时间结束时(即服务期开始时)系统中的信元数少 M 个,或者(2) 系统中无信元. 对于这个系统我们先来求 L^{*}(一个假时间结束时系统中的信元数)的 PGF$Q(Z)$

设 L_n^{*} 仍为第 n 个假时间结束时系统中的信元数. 因为

$$L_{n+1}^{*} = \begin{cases} f, & L_n^{*} < M, \\ L_n^{*} - M + f, & L_n^{*} \geq M, \end{cases} \qquad (4.4.17)$$

且 $\{L_n^{*}, n = 1,2,3,\cdots\}$ 的一步转移概率为

$$p_{jk} = P\{L_{n+1}^* = k \mid L_n^* = j\}$$
$$= \begin{cases} f_k, j < M, \\ f_{k+M-j}, M + k \geqslant j \geqslant M, \\ 0, j \geqslant M, j > k - M, \end{cases} \quad (4.4.18)$$

故

$\{L_n^*, n=1,2,3,\cdots\}$为齐次马尔可夫链.从而 L^* 的分布为

$$q_k \equiv \lim_{n\to\infty} P\{L_{n+1}^* = k\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P\{L_n^* = j\} p_{jk}$$
$$= f_k \sum_{j=0}^{M-1} q_j + \sum_{j=M}^{k+M} q_j f_{k+M-j}, k = 0,1,2,\cdots. \quad (4.4.19)$$

从而

$$Q(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k q_k = \sum_{k=0}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^{M-1} f_k q_j + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=M}^{K+M} q_j f_{k+M-j} Z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} Z^k f_k \sum_{j=0}^{M-1} q_j + \sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^{j-M} \sum_{k=j-M}^{\infty} f_{k+M-j} Z^{k+M-j}$$
$$= F(Z) Q_M(1) + \frac{1}{Z^M}\sum_{j=M}^{\infty} q_j Z^j \sum_{m=0}^{\infty} Z^m f_m$$
$$= F(Z) Q_M(1) + \frac{1}{Z^M}[Q(Z) - Q_M(Z)] F(Z)$$
$$= V^*(\lambda - \lambda Z)\{Q_M(1) + \frac{1}{Z^M}[Q(Z) - Q_M(Z)]\}. \quad (4.4.20)$$

由上式解出 $Q(Z)$,得

$$Q(Z) = \frac{[Q_M(Z) - Z^M Q_M(1)] V^*(\lambda - \lambda Z)}{V^*(\lambda - \lambda Z) - Z^M}. \quad (4.4.21)$$

与 4.3.2 节类似,上式右边分母当

$$\lambda E(V) < M$$

时,在$|Z|=1$ 内有 $M-1$ 个零点.由拉格朗日定理,它们是

$$Z_m = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\pi mnj/M} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{V^*(\lambda - \lambda Z)\}^{n/M} \Big|_{z=0},$$
$$m = 1,2,\cdots,M-1, \quad (4.4.22)$$

且由条件 (4.4.21)右边的分子在

$$Z = Z_m, m = 1,2,\cdots,M-1,$$

也是0.这样,$Q_M(Z)$的 M 个系数$\{q_k, k=0,1,2,\cdots,M-1\}$由线性方程组:

$$\sum_{k=0}^{M-1}[Z_m^M - Z_m^k]q_k = 0,\ m = 1,2,\cdots,M-1, \tag{4.4.23}$$

和方程

$$Q'_M(1) = \lambda E(V) - M[1 - Q_M(1)] \tag{4.4.24}$$

确定.(4.4.24)由(4.4.21)和条件 $Q(1)=1$ 可得.

现在我们来求一信元离开时系统中信元数 L 的 PGF $\pi(Z)$. 因为在一个服务期内服务完的平均信元数为

$$\left(因\ \Phi = \begin{cases} \sum_{i=1}^{L^*}\Gamma_i, L^* < M \\ \sum_{i=1}^{M}\Gamma_i, L^* \geqslant M \end{cases}\right)$$

$$\begin{aligned} E(\Phi) &= \sum_{k=1}^{M-1} q_k k E(\Gamma) + \sum_{k=M}^{\infty} q_k M E(\Gamma) \\ &= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{M-1} k q_k + \frac{M}{1-\rho}\sum_{k=M}^{\infty} q_k \\ &= \frac{1}{1-\rho}\{Q'_M(1) + M[1 - Q_M(1)]\} \qquad [由(4.4.24)] \\ &= \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}, \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

其中 Γ 为系统$M/G/1$ 中一个忙期中服务完的信元数,诸 Γ_i 相互独立,均与 Γ 同分布.

设 L_n 为第 n 个信元离开时系统中的信元数.当 $L^*=k(<M)$ 时,服务期就由 k 个忙期组成,而在每个忙期中信元离开时系统中的信元数的 PGF 可以像一般 $M/G/1$ 系统那样处理.由(3.1.26)知对于一般 $M/G/1$ 系统一个信元离开时系统中信元数的 PGF 为

$$\frac{\pi_0(1-Z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z) - Z},$$

其中 $\pi_0=1-\rho$ 为系统中无信元的概率.类似地,当一个忙期开始时系统中有 j 个信元,到该忙期结束时,系统中将恰有 $j-1$ 个信元,这也是下一个忙期开始时系统中的信元数.所以当第 n 个信元为第 j 个忙期中一个信元时,$E(Z^{L_n})$ 由

$$Z^{j-1}\frac{(1-Z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}$$

组成.如果 $L^*=k<M$,则服务期由 k 个忙期组成,这个 k 个忙期分别以 $k,k-1,\cdots,1$ 个信元开始.因此 $E\left[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\right]$ 为

$$\sum_{j=1}^{k}Z^{j-1}\frac{(1-z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}=\frac{(1-Z^k)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}. \quad (4.4.26)$$

如果 $L^*=k\geqslant M$,则服务期由 M 个忙期组成,这 M 个忙期分别以 $k,k-1\cdots,k-M+1$ 个信元开始.因此,$E\left[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\right]$ 为

$$\sum_{j=k-M+1}^{k}Z^{j-1}\frac{(1-z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}=\frac{(Z^{k-M}-Z^k)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}. \quad (4.4.27)$$

所以

$$\begin{aligned}E\left[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\right]&=\sum_{k=1}^{\infty}q_kE\left[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\mid L^*=k\right]\\&=\sum_{k=1}^{M-1}q_k\frac{(1-Z^k)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}+\sum_{k=M}^{\infty}q_k\frac{(Z^{k-M}-Z^k)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}\\&=\{Q_M(1)-Q(Z)+Z^{-M}[Q(Z)-Q_M(Z)]\}\frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}.\end{aligned} \quad (4.4.28)$$

由(4.4.21)得

$$E\left[\sum_{n=1}^{\Phi}Z^{L_n}\right]=\frac{[1-V^*(\lambda-\lambda Z)][Q_M(Z)-Z^MQ_M(1)]B^*(\lambda-\lambda Z)}{[V^*(\lambda-\lambda Z)-Z^M][B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]}. \quad (4.4.29)$$

由(4.2.8),(4.4.25)与(4.4.29)得

$$\pi(Z)=\frac{(1-\rho)[1-V^*(\lambda-\lambda Z)][Q_M(Z)-Z^MQ_M(1)]B^*(\lambda-\lambda Z)}{\lambda E(V)[V^*(\lambda-\lambda Z)-Z^M][B^*(\lambda-\lambda Z)-Z]}. \tag{4.4.30}$$

从而对先来先服务规则下，信元等待时间 W 的 LST 为

$$W^*(s)=\frac{1-V^*(s)}{sE(V)}\cdot\frac{(1-s/\lambda)^MQ_M(1)-Q_M(1-s/\lambda)}{(1-s/\lambda)^M-V^*(s)}\cdot\frac{s(1-\rho)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)}, \tag{4.4.31}$$

且

$$E(W)=\frac{E(V^2)}{2E(V)}+\frac{\lambda^2E(V^2)-Q''_M(1)-M(M-1)[1-Q_M(1)]}{2\lambda[M-\lambda E(V)]}$$
$$+\frac{2b^{(2)}}{2(1-\rho)}. \tag{4.4.32}$$

该系统的平稳条件为

$$E(\Phi)<ME(\Gamma)=\frac{M}{1-\rho},\ \rho<1,$$

即

$$\lambda E(V)<M,\ \rho<1. \tag{4.4.33}$$

4.4.3 二项穷尽服务系统

二项穷尽服务系统是这样的系统：服务一经开始，它将以概率

$$C_{L^*}^k p^k(1-p)^{L^*-k},\quad k=0,1,\cdots,L^* \tag{4.4.34}$$

使系统中的信元数比服务开始时系统中信元 L^* 少 k 个. 即设服务期开始时系统中信元为 $L^*=n$ 个，当服务期结束时，系统中以概率 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$ 有 $n-k$ 个信元. 其中 $p(0<p\leqslant1)$ 是参数. 当 $p=1$ 时，系统就变为穷尽服务系统.

在这个系统中，设 L_n^* 为第 n 个假时间结束时系统中的信元数. η 为下一个服务期开始时与结束时系统中信元数之差. 因为

$$L_{n+1}^*=L_n^*-\eta+f, \tag{4.4.35}$$

其中 f 为第 $n+1$ 个假时间中到达的信元数，所以

$$Q(Z)=E[Z^{L^*}]\equiv\lim_{n\to\infty}E[Z^{L_{n+1}^*}]=\lim_{n\to\infty}E[Z^{L_n^*-\eta+f}]$$

$$= E[Z^{L^*-\eta}]E(Z^f)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n E[Z^{n-\eta}]V^*(\lambda - \lambda Z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \cdot Z^{n-k} V^*(\lambda - \lambda Z)$$

$$= Q[p + (1-p)Z]V^*(\lambda - \lambda Z). \tag{4.4.36}$$

由此得

$$E(L^*) = Q'(1) = \frac{\lambda E(V)}{p}, \tag{4.4.37}$$

$$Q''(1) = \frac{2(1-p)[\lambda E(V)]^2}{p^2(2-P)} + \frac{\lambda^2 E(V^2)}{p(2-p)}. \tag{4.4.38}$$

注意,

$$H(Z) \equiv E(Z^{L^*}) = E(Z^{L^*-\eta}) = Q[p+(1-p)Z]. \tag{4.4.39}$$

为求一信元离开系统时系统中的信元数的 PGF $\pi(Z)$,需求 $E(\Phi)$与 $E[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}]$. 因为

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\eta} \Gamma_i, \tag{4.4.40}$$

其中 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n, \cdots$独立同分布,均与 Γ 同分布,而 Γ 为一般系统$M/G/1$ 中一个忙期中服务完的信元数,所以

$$E\Phi = E(\Gamma)E(\eta) = \frac{1}{1-\rho} E[E(\eta \mid L^*)] = \frac{E[L^* p]}{1-\rho}$$

$$= \frac{pE(L^*)}{1-\rho} = \frac{\lambda E(V)}{1-\rho}. \tag{4.4.41}$$

又类似于(4.4.28)式的推导,有

$$E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\sum_{n=1}^{\Phi} Z^{L_n} \mid L^* = k\right] q_k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q_k \sum_{l=0}^{k} C_k^l p^l (1-p)^{k-l} Z^{k-l}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{l} Z^{j-1} \frac{(1-Z)B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} q_k \{[p+(1-p)z]^k - z^k\} \frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}$$

$$= \{Q[p+(1-p)Z] - Q(Z)\} \cdot \frac{B^*(\lambda-\lambda Z)}{B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}. \tag{4.4.42}$$

由(4.2.8),(4.4.41)与(4.4.42)得

$$\pi(Z) = \{Q[p+(1-p)Z] - Q(Z)\} \cdot \frac{(1-\rho)B^*(\lambda-\lambda Z)}{\lambda E(V)B^*(\lambda-\lambda Z)-Z}$$

$$= H(Z) \cdot \alpha_-(Z) \cdot \pi_{M/G/1}(Z), \tag{4.4.43}$$

其中 $H(Z)$, $\alpha_-(Z)$. $\pi_{M/G/1}(Z)$分别由(4.4.39),(4.4.13),(4.4.3)给出. 由(3.1.26)得 FCFS 规则下一信元等待时间 W 的 LST

$$W^*(s) = \frac{Q[1-(1-p)\frac{s}{\lambda}] - Q(1-\frac{s}{\lambda})}{E(V)s} \cdot \frac{(1-\rho)s}{\lambda B^*(s)-\lambda+s}, \tag{4.4.44}$$

且

$$E(W) = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{(2-p)Q''(1)}{2\lambda Q'(1)}$$

$$= \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \frac{E(V^2)}{2E(V)} + \frac{(1-p)E(V)}{p}. \tag{4.4.45}$$

当 $p=1$ 时,(4.4.44),(4.4.45)分别化为(4.1.37)与(4.1.40).

第五章　$G/M/m$ 系统

这一章讨论 $G/M/m$ 系统. 该系统的基本假设如下:

(1) 系统到达间隔时间序列$\{J_i, i \geq 1\}$为 i.i.d 随机变量序列, J_1 服从一般分布, 其分布函数为 $A(t)$, 且存在前两阶原点矩.

(2) 服务机构有 m 个服务台, 每个服务台对每个顾客的服务时间互相独立同分布, 均服从参数为 μ 的指数分布. 即设$\{B_i, i \geq 1\}$为服务时间序列. 则$\{B_i, i \geq 1\}$i.i.d 且 $B_1 \sim \Gamma(1, \mu)$.

(3)$\{B_i, i \geq 1\}$与$\{J_i, i \geq 1\}$相互独立.

§5.1　到达时刻队长的平稳分布

5.1.1　嵌入马氏链的转移概率

设 $X(t)$为时刻 t 时系统中的顾客数. τ_n 为第 n 个顾客到达的时刻. Q_n 为第 n 个顾客到达时系统中的顾客数, 即 $Q_n = X(\tau_n - 0), n = 1, 2, 3, \cdots$. V_{n+1}为在到达间隔时间 $J_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n$ 中服务完的顾客数, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 这时 $X(t)$已不是马氏过程. 但是, 易见有

$$Q_{n+1} = Q_n + 1 - V_{n+1}, n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad (5.1.1)$$

因此, 当 Q_n 已知时, Q_{n+1}与 $Q_1, Q_2, \cdots Q_{n-1}$无关, 故$\{Q_n, n \geq 1\}$是马氏链. 又因诸 V_n 独立同分布且 V_{n+1}与 Q_n 独立, 所以

$$\begin{aligned} p_{i,j}(n,1) &= P\{Q_{n+1} = j \mid Q_n = i\} = P\{Q_n + 1 - V_{n+1} = j \mid Q_n = i\} \\ &= P\{V_{n+1} = i + 1 - j\} = P\{V_1 = i + 1 - j\}, \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

从而一步转移概率 $p_{i,j}(n,1) = p_{ij}$与 n 无关, 即$\{Q_n, n \geq 1\}$是齐次马氏链. 设 $M(t)$表示在时间区间$(0, t]$中离开系统的顾客数.

(1) 当 $j\leqslant i+1\leqslant m$ 时,

$$p_{ij}=P\{V_1=i+1-j\}=P\{M(J_1)=i+1-j\}$$

$$=\int_0^\infty P\{M(t)=i+1-j\}dA(t)$$

$$=\int_0^\infty C_{i+1}^{i+1-j}[P\{B_1\leqslant t\}]^{i+1-j}[P\{B_1>t\}]^j dA(t)$$

$$=\int_0^\infty C_{i+1}^j(1-e^{-\mu t})^{i+1-j}e^{-j\mu t}dA(t).$$

(2) 当 $m\leq j\leq i+1$ 时

$$p_{ij}=P\{V_1=i+1-j\}=\int_0^\infty P\{M(t)=i+1-j\}dA(t)$$

$$=\int_0^\infty e^{-m\mu t}\frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!}dA(t)\triangleq\beta_{i+1-j}.$$

(3) 当 $j<m<i+1$ 时

$$p_{ij}=P\{V_1=i+1-j\}=P\{M(J_1)=i+1-j\}$$

$$=\int_0^\infty P\{M(t)=i+1-j\}dA(t).$$

现来求 $P\{M(t)=i+1-j\}$,因为 $j<m<i+1$,所以在长为 t 的时间区间$(0,t]$中,先有顾客在等待(m 个服务台都在工作),后无顾客在等待.在有顾客等待这段时间内,服务了 $i+1-m$ 个顾客,故其长为 $\sum_{k=1}^{i+1-m}\eta_k$, $\eta_k\sim\Gamma(1,m\mu)$,且 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\cdots$ 相互独立同分布.从而 $\sum_{k=1}^{i+1-m}\eta_k\sim\Gamma(i+1-m,\mu m)$.从无顾客等待时刻到时刻 t 这段时间服务了剩下的 m 个顾客中的 $m-j$ 个顾客,从而有

$$P\{M(t)=i+1-j\}=\int_0^t P\{M(t)=i+1-j\mid\sum_{k=1}^{i+1-m}\eta_k$$

$$=x\}e^{-m\mu x}\frac{m\mu(m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!}dx$$

$$=\int_0^t P\{M(t-x)=m-j\}e^{-m\mu x}\frac{m\mu(m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!}dx$$

$$=\int_0^t C_m^{m-j}[1-e^{-\mu(t-x)}]^{m-j}e^{-\mu j(t-x)}e^{-m\mu x}\frac{m\mu(m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!}dx$$

$$=\int_0^t C_m^j e^{-j\mu t}[e^{-\mu x}-e^{-\mu t}]^{m-j}\frac{m\mu(m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!}dx.$$

故

$$p_{ij}=\int_0^\infty C_m^j e^{-j\mu t}\left[\int_0^t (e^{-\mu x}-e^{-\mu t})^{m-j}\frac{m\mu(m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!}dx\right]dA(t).$$

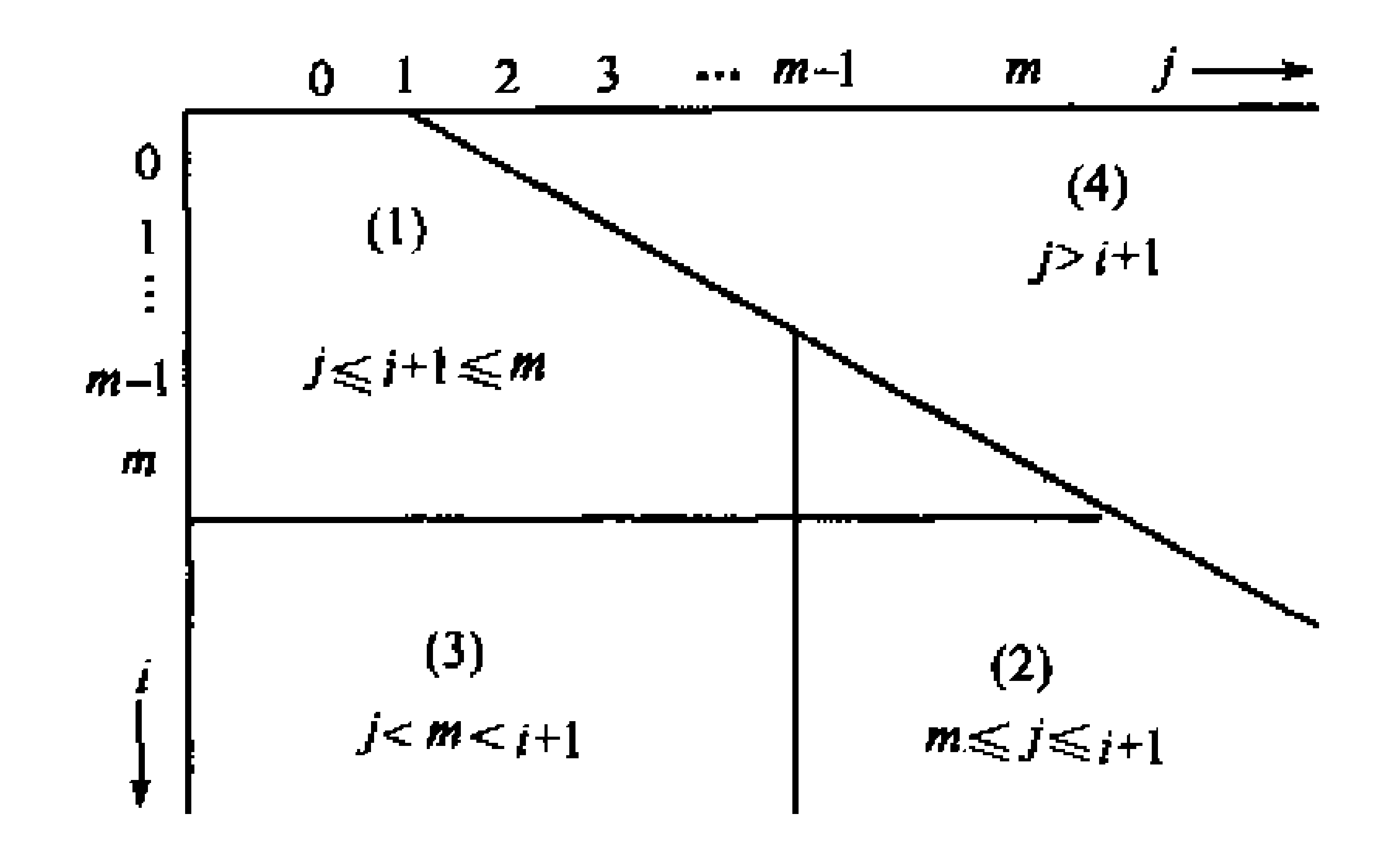
(4) 当 $j>i+1$ 时,

$$p_{ij}=P\{V_1=i+1-j\}=0.$$

综上所述得

$$p_{ij}\{n,1)=p_{ij}=\begin{cases}\int_0^\infty C_{i+1}^j e^{-j\mu t}(1-e^{-\mu t})^{i+1-j}dA(t),\ j\le i+1\le m,\\ \int_0^\infty e^{-m\mu t}\frac{(m\mu t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!}dA(t),\ m\le j\le i+1,\\ \int_0^\infty C_m^j e^{-j\mu t}\left[\int_0^t (e^{-\mu x}-e^{-\mu t})^{m-j}\frac{m\mu(m\mu x)^{i-m}}{(i-m)!}dx\right]\\ \qquad\cdot dA(t),\ j<m<i+1,\\ 0,\ j>i+1,\end{cases}\tag{5.1.3}$$

且 $\{Q_n, n\geq 1\}$ 的转移概率矩阵具有如下形式:



即

$$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m-2,0} & p_{m-2,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m-2,m-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_{m-1,0} & p_{m-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m-1,m-1} & \beta_0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_{m0} & p_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m,m-1} & \beta_1 & \beta_0 & 0 & \cdots \\ p_{m+1,0} & p_{m+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{m+1,m-1} & \beta_2 & \beta_1 & \beta_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}. \tag{5.1.4}$$

5.1.2 到达时刻队长的平稳分布

对 $G/M/m$，记$\frac{1}{\lambda}=E(J_1)$. 当$\frac{\lambda}{m\mu}<1$时，$\{Q_n,n\geqslant1\}$的平稳分布存在(证明见[2]). 记其平稳分布为$\{\pi_k,k\geqslant0\}$. 则由平稳方程

$$(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_j,\cdots)=(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_j,\cdots)P \tag{5.1.5}$$

与(5.1.4)当 $j\geqslant m-1$ 时，易求得诸 π_j. π_j 满足方程

$$\pi_{j+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_{k+j}\beta_k,\ j\geqslant m-1. \tag{5.1.6}$$

为解此差分方程. 令

$$\pi_j=\sigma^j,\ j\geqslant m-1, \tag{5.1.7}$$

σ 为待定常数. 于是得 $\sigma^{j+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^{k+j}\beta_k$，即

$$\sigma=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k\beta_k, \tag{5.1.8}$$

因为

$$\beta_k=\int_0^{\infty}e^{-m\mu t}\frac{(m\mu t)^k}{k!}dA(t),$$

所以

$$\sigma=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k\int_0^{\infty}e^{-m\mu t}\frac{(m\mu t)^k}{k!}dA(t)$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-m\mu t}e^{\sigma m\mu t}dA(t)=\int_0^{\infty}e^{-(m\mu-\sigma m\mu)t}dA(t),$$

即

$$\sigma=A^*(m\mu-m\mu\sigma),\tag{5.1.9}$$

其中 $A^*(S)$为 J_1 的 LST

σ 为方程

$$z=A^*(m\mu-m\mu z)$$

在单位圆$|z|<1$ 内的唯一解.把 σ 代入(5.1.7)得

$$\pi_j=k\sigma^j\qquad\left(k\text{ 可由}\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1\text{ 确定}\right),\ j\geqslant m-1.\tag{5.1.10}$$

从而平稳分布解的一般式为

$$(\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{m-2},k\sigma^{m-1},k\sigma^m,k\sigma^{m+1},\cdots).\tag{5.1.11}$$

现在求 $\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{m-2}$. 记 $R_j=\frac{\pi_j}{k\sigma^{m-1}},j\leq m-j$. 则上式为

$$k\sigma^{m-1}(R_0,R_1,\cdots,R_{m-2},1,\sigma,\sigma^2,\cdots).\tag{5.1.12}$$

从而(5.1.5)式的前 $m-1$ 个方程为

$$R_j=\sum_{i=j-1}^{m-2}R_ip_{ij}+\sum_{i=m-1}^{\infty}\sigma^{i-(m-1)}p_{ij},i<m-1.\tag{5.1.13}$$

故

$$R_{j-1}=\left[R_j-\sum_{i=j}^{m-2}R_ip_{ij}-\sum_{i=m-1}^{\infty}\sigma^{i-(m-1)}p_{ij}\right]/p_{j-1,j},j\leqslant m-1.\tag{5.1.14}$$

在上式中,令 $j=m-1$(由于 $R_{m-1}=1$)得

$$R_{m-2}=\left[1-\sum_{i=m-1}^{\infty}\sigma^{i-(m-1)}p_{i,m-1}\right]/p_{m-2,m-1}.\tag{5.1.15}$$

令 $j=m-2$,得

$$R_{m-3}=\left[R_{m-2}-R_{m-2}p_{m-2,m-2}-\sum_{i=m-1}^{\infty}\sigma^{i-(m-1)}p_{i,m-2}\right]/p_{m-3,m-2},$$

(5.1.16)

其中 R_{m-2} 由(5.1.15)确定.依此可逐个求得 $R_{m-4},R_{m-5},\cdots,R_0$.现求(5.1.12)中的 $k\sigma^{m-1}$.由

$$k\sigma^{m-1}\left[\sum_{j=0}^{m-2}R_j+\sum_{j=m+1}^{\infty}\sigma^{j-(m-1)}\right]=1,$$

得

$$k\sigma^{m-1}=\left[\sum_{j=0}^{m-2}R_j+\frac{1}{1-\sigma}\right]^{-1}. \qquad (5.1.17)$$

这样,到达时刻队长的平稳分布由(5.1.9),(5.1.11),(5.1.14),(5.1.17)完全确定.

一顾客到达时需要等待的概率为

$$\sum_{j=m}^{\infty}\pi_j=\sum_{j=m}^{\infty}k\sigma^m=\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}, \qquad (5.1.18)$$

其中 σ 由(5.1.9)确定,$k\sigma^{m-1}$由(5.1.17)确定.

由平稳分布(5.1.12)可得平均队长 $\overline{X}$

$$\overline{X}=k\sigma^{m-1}\left[\sum_{j=0}^{m-2}jR_j+\sum_{j=m-1}^{\infty}j\sigma^{j-(m-1)}\right] \qquad [令\ j-(m-1)=r]$$

$$=k\sigma^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-2}jR_j+\sum_{r=0}^{\infty}[r+(m-1)]\sigma^r\right\}$$

$$=k\sigma^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-2}jR_j+\frac{m-1}{1-\sigma}+\sum_{r=1}^{\infty}r\sigma^{r-1}\sigma\right\}$$

$$=k\sigma^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-2}jR_j+\frac{m-1}{1-\sigma}+\frac{\sigma}{(1-\sigma)^2}\right\}$$

$$=k\sigma^{m-1}\left\{\sum_{j=1}^{m-2}jR_j+\frac{(m-1)(1-\sigma)+\sigma}{(1-\sigma)^2}\right\}. \qquad (5.1.19)$$

平均等待队长为

$$\overline{X}_q=\sum_{j=0}^{\infty}jk\sigma^{j+m}=k\sigma^{m+1}\sum_{j=1}^{\infty}j\sigma^{j-1}=\frac{k\sigma^{m+1}}{(1-\sigma)^2}.$$

(5.1.20)

§5.2 等待时间的分布

5.2.1 等待时间的分布

现考虑统计平衡后(即在条件$\frac{\lambda}{m\mu}<1$下)顾客等待时间的分布.设 W 为一顾客的等待时间的长.

$$P\{W=0\}=\sum_{j=0}^{m-1}\pi_j=1-\sum_{j=m}^{\infty}\pi_j=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}. \quad (5.2.1)$$

当 $t>0$ 时,

$$\begin{aligned}P\{W<t\}&=P\{W=0\}+P\{0<W<t\}\\&=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}+\sum_{j=m}^{\infty}P\{0<W<t\mid \text{到达时系统中有 } j \text{ 个顾客}\}\cdot\pi_j\\&=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}+\sum_{j=m}^{\infty}k\sigma^jP\left\{0<\sum_{i=1}^{j+1-m}\tilde{\beta}_i<t\right\},\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\beta}_i\sim\Gamma(1,m\mu),i=1,2,3,\cdots$,且 $\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\tilde{\beta}_3,\cdots$相互独立,故

$$\sum_{i=1}^{j+1-m}\tilde{\beta}_i\sim\Gamma(j+1-m,m\mu).$$

从而

$$\begin{aligned}P\{W<t\}&=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}+\sum_{j=m}^{\infty}k\sigma^j\int_0^t e^{-m\mu x}\frac{m\mu(m\mu x)^{j-m}}{(j-m)!}dx\\&=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}+k\sigma^m\int_0^t e^{-m\mu x}\cdot m\mu e^{m\mu\sigma x}dx\\&=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}+km\mu\sigma^m\cdot\frac{1-e^{-m\mu(1-\sigma)t}}{m\mu(1-\sigma)}\\&=1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}e^{-m\mu(1-\sigma)t},\end{aligned}$$

即

$$F_W(t)\equiv P\{W<t\}=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma}e^{-m\mu(1-\sigma)t}, & t\geqslant 0.\end{cases} \quad (5.2.2)$$

W 的密度函数 $f_W(t)$ 为

$$f_W(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ (1-\frac{k\sigma^m}{1-\sigma})\delta(t)+m\mu k\sigma^m e^{-m\mu(1-\sigma)t}, & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{5.2.3}$$

从而

$$E(W)=\int_0^{\infty}f_W(t)tdt=\frac{k\sigma^m}{m\mu(1-\sigma)^2}, \tag{5.2.4}$$

$$D(W)=\frac{k\sigma^m}{m^2\mu^2(1-\sigma)^3}. \tag{5.2.5}$$

因为逗留时间 $S=W+B$，而 $B\sim\Gamma(1,\mu)$ 且 W 与 B 独立，所以 S 的密度函数为

$$\begin{aligned}f_S(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_W(x)f_B(t-x)dx\\ &=\begin{cases}0,\ t<0,\\ \int_0^t f_W(x)f_B(t-x)dx,\ t\geqslant 0\end{cases}\\ &=\begin{cases}0,t<0,\\ \frac{m\mu k\sigma^m}{1-m(1-\sigma)}e^{-m\mu(1-\sigma)t}+\frac{1-\sigma-m(1-\sigma)^2-k\sigma^m}{1-\sigma-m(1-\sigma)^2}\mu e^{-\mu t},\\ \qquad t\geqslant 0,\end{cases}\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

$$E(S)=\frac{k\sigma^m}{m\mu(1-\sigma)^2}+\frac{1}{\mu}, \tag{5.2.7}$$

$$D(S)=\frac{k\sigma^m}{m^2\mu^2(1-\sigma)^3}+\frac{1}{\mu^2}. \tag{5.2.8}$$

5.2.2 G/M/1 系统

当 $m=1$ 时，(5.1.9)变为

$$\sigma=A^*(\mu-\mu\sigma). \tag{5.2.9}$$

由此解出 σ 代入(5.1.10)．再由 $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$，得到达时刻的分布：

$$\pi_j=(1-\sigma)\sigma^j,\quad j\geqslant 0,\quad \rho\equiv\frac{\lambda}{\mu}<1. \tag{5.2.10}$$

从而，到达时刻队长的数学期望与方差分别为

$$E(X)=\frac{\sigma}{1-\sigma},\quad D(X)=\frac{\sigma^2}{(1-\sigma)^2},\quad \rho<1. \tag{5.2.11}$$

由(5.2.2).这时($m=1$)等待时间 W 的分布函数为

$$F_W(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ 1-\sigma e^{-\mu(1-\sigma)t},\ t\geqslant 0,\ \rho<1.\end{cases} \tag{5.2.12}$$

从而 W 的分布密度函数为

$$f_W(t)=\begin{cases}0,\ t<0,\\ (1-\sigma)\delta(t)+\mu(1-\sigma)\sigma e^{-\mu(1-\sigma)t},\quad t\geqslant 0\end{cases}$$

故

$$E(W)=\frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)},\ D(W)=\frac{\sigma}{\mu^2(1-\sigma)^2},\quad \rho<1. \tag{5.2.14}$$

5.2.3 G/M/2 系统

当 $m=2$ 时，(5.1.9)变为

$$\sigma=A^*(2\mu-2\mu\sigma). \tag{5.2.15}$$

由上式解出 σ 代入(5.1.10)得

$$\pi_j=k\sigma^j,\quad j\geqslant 1. \tag{5.2.16}$$

由(5.1.14)得

$$R_0=\left[R_1-\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^{i-1}p_{i1}\right]\Big/p_{01}. \tag{5.2.17}$$

由(1)得

$$p_{01}=\int_0^{\infty}(1-e^{-\mu t})^0e^{-\mu t}dA(t)=A^*(\mu), \tag{5.2.18}$$

$$p_{11}=\int_0^{\infty}C_2^1(1-e^{-\mu t})e^{-\mu t}dA(t)$$

$$=2A^*(\mu)-2A^*(2\mu). \tag{5.2.18'}$$

由(3)得

$$p_{i1} = \int_0^\infty C_2^1 e^{-\mu t}\left[\int_0^t (e^{-\mu x} - e^{-\mu t}) \frac{2\mu(2\mu x)^{i-2}}{(i-2)!} dx\right] dA(t), \quad i \geqslant 2.$$

故

$$\sum_{i=2}^{\infty} \sigma^{i-1} p_{i1} = \int_0^\infty 2e^{-\mu t}\left[\int_0^t (e^{-\mu x} - e^{-\mu t}) 2\mu\sigma e^{2\mu\sigma x} dx\right] dA(t)$$

$$= 4\mu\sigma \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^t [e^{-\mu(1-2\sigma)x} - e^{-\mu t} e^{2\mu\sigma x}] dx dA(t)$$

$$= 4\mu\sigma \int_0^\infty \{\frac{1}{\mu(1-2\sigma)}[e^{-\mu t} - e^{2\mu(1-\sigma)t}]$$

$$+ \frac{1}{2\mu\sigma}[e^{-2\mu t} - e^{-2\mu(1-\sigma)t}]\} dA(t)$$

$$= 2A^*(2\mu) - 2A^*(2\mu - 2\mu\sigma)$$

$$+ \frac{4\sigma}{1-2\sigma}[A^*(\mu) - A^*(2\mu - 2\mu\sigma)]$$

$$= 2A^*(2\mu) - 2\sigma + \frac{4\sigma}{1-2\sigma}[A^*(\mu) - \sigma]. \quad (5.2.19)$$

又因 $R_1 = R_{m-1} = 1$，将(5.2.19)，(5.2.18)，(5.2.18′)一起代入(5.2.17)得

$$R_0 = \left[1 - 2A^*(\mu) + 2A^*(2\mu) - 2A^*(2\mu) + 2\sigma - \frac{4\sigma}{1-2\sigma}(A^*(\mu) - \sigma)\right] \Big/ A^*(\mu)$$

$$= \frac{1 - 2A^*(\mu)}{(1-2\sigma)A^*(\mu)}. \quad (5.2.20)$$

由(5.1.17)得

$$K = \left[\sigma R_0 + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right]^{-1} = \frac{(1-\sigma)(1-2\sigma)A^*(\mu)}{\sigma[1-\sigma-A^*(\mu)]}. \quad (5.2.21)$$

由(5.1.2)知

$$\pi_0 = k\sigma^{m-1}R_0 = k\sigma R_0 = \frac{(1-\sigma)[1-2A^*(\mu)]}{1-\sigma-A^*(\mu)}. \quad (5.2.22)$$

由(5.2.16)得

$$\pi_j = \frac{(1-\sigma)(1-2\sigma)A^*(\mu)\sigma^{j-1}}{1-\sigma-A^*(\mu)}, \quad j \geqslant 1. \quad (5.2.23)$$

故到达时刻队长的数学期望与方差分别为

$$E(X) = \frac{(1-2\sigma)A^*(\mu)}{(1-\sigma)[1-\sigma-A^*(\mu)]},$$

$$D(X) = \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{(1-\sigma)^2[1-\sigma-A^*(\mu)]}. \quad (5.2.24)$$

由(5.2.3)等待时间 W 的密度为

$$f_w(t) = \begin{cases} 0, t<0, \\ (1-\frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{1-\sigma-A^*(\mu)})\delta(t) + \frac{2\mu\sigma(1-\sigma)(1-2\sigma)A^*(\mu)}{1-\sigma-A^*(\mu)} \\ \cdot e^{-2\mu(1-\sigma)t}, \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

(5.2.25)

由(5.2.4)与(5.2.5)得

$$E(W) = \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{2\mu(1-\sigma)[1-\sigma-A^*(\mu)]},$$

$$D(W) = \frac{\sigma(1-2\sigma)A^*(\mu)}{4\mu^2(1-\sigma)^2[1-\sigma-A^*(\mu)]}. \quad (5.7.26)$$

第六章　离散时间排队系统

在这一章中，我们讨论离散时间参数集的排队系统，我们取时间集为{0,1,2...}，并假设顾客到达与离开都发生在各单位时间点上，由于服务机构性能的不同，顾客到达与离开的时刻也不同，由此可将系统分为三种类型．第一种类型称为早到达系统，顾客到达发生在（每个）单位时间的开始，顾客的离开发生在（每个）单位时间的结束之前，即顾客在$(n, n+)$中到达，可能在$((n+1)-, (n+1))$中（服务完）离开$(n=0,1,2,3\cdots)$．第二种类型称为迟到达立刻进入系统，顾客到达发生在（每个）单位时间结束之前，而离开可能发生在（每个）单位时间的开始，即顾客在$(n-, n)$中到达，可能在$(n, n+)$中（服务完）离开$(n=1,2,3\cdots)$．第三种类型称为迟到达延迟进入系统，即顾客在$(n-, n)$中到达，可能在$(n+1, (n+1)+)$中（服务完）离开$(n=1,2,3\cdots)$．

由上分类可知，对于迟到达系统，如果在$(n-, n)$中有一个顾客到达并且这时服务员空闲，则对于立刻进入类型，在$(n, n+)$中该顾客可能被服务完离开系统，而对延迟进入类型，在$(n, n+)$中该顾客不可能被服务．本章假设每个顾客的服务时间至少为一个单位时间．

§6.1　Geo/Geo/1 系统

Geo/Geo/1 系统的基本假设是：

(1)顾客到达间隔时间序列$\{J_n, n\geqslant 1\}$是 i.i.d 随机变量序列，且J_j服从参数为λ的几何分布，即$J_n\sim \mathrm{Geo}(\lambda)$，也即$P\{J_n=k\}=\lambda\bar{\lambda}^{k-1}, k=1,2,3,\cdots$，其中$\bar{\lambda}=1-\lambda, 0<\lambda<1$．由定理 1.4.2 系统的到达（输入）过程$\{N(n), n\geqslant 0\}$是参数为$\lambda$的伯努利过程．

(2)各个顾客的服务时间序列$\{B_n, n\geqslant 1\}$是 i.i.d 随机变量序列，且 $B_n \sim \text{Geo}(\mu), 0<\mu<1$.

(3)服务机构只有一个服务台，并设$\{J_n, n\geqslant 1\}$与$\{B_n, n\geqslant 1\}$相互独立.

6.1.1 队长的平稳分布

设 $Q(t)$表示时刻 t 时 Geo/Geo/1 系统中的顾客数. 对于早到达系统，记

$$X_n = Q(n-), Y_n = Q(n), Z_n = Q(n+), \quad n=0,1,2\cdots. \tag{6.1.1}$$

对于迟到达立刻进入系统，记

$$X_n^{(i)} = Q(n-), Y_n^{(i)} = Q(n), Z_n^{(i)} = Q(n+), \quad n=0,1,2,3\cdots. \tag{6.1.2}$$

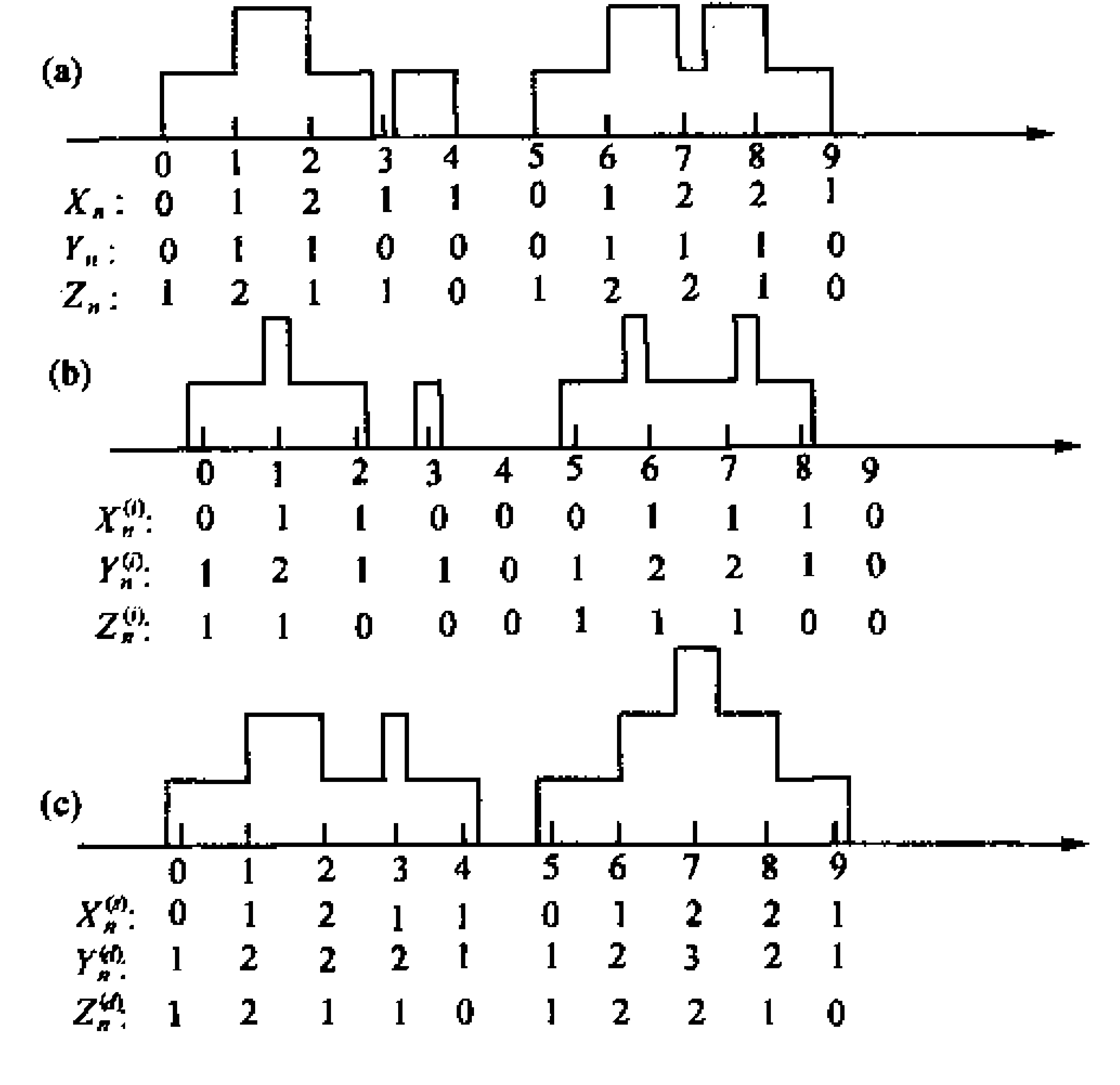


图 6-1 各过程样本路线

对于迟到达延迟进入系统，记

$$X_n^{(d)}=Q(n-),Y_n^{(d)}=Q(n),Z_n^{(d)}=Q(n+),n=0,1,2,3\cdots. \tag{6.1.3}$$

图 6-1 详细描述上述各过程的样本路线.这些样本路线描述了在 0,1,3,5,6,7 各时间点各有一个顾客到达(即到达间隔时间分别为 1,2,2,1,1)而在 2,3,4,7,8,9 各时间点各有一个顾客离开(即服务时间分别为 2,1,1,2,1,1).

由样本路线与图 6-2,可知

$$Z_n=X_{n+1}. \tag{6.1.4}$$

到达 $X_n Y_n \downarrow Z_n$ $n-\downarrow n$ $n+$ 离开

到达 $X_{n+1}\ Y_{n+1}\downarrow Z_{n+1}$ $(n+1)-\downarrow n+1$ $(n+1)+$ 离开

图 6-2

类似地有

$$X_n^{(i)}=Y_n,Y_n^{(i)}=X_{n+1},X_n^{(d)}=X_n,Z_n^{(d)}=X_{n+1}. \tag{6.1.5}$$

因此,我们只需考虑早到达系统.因为过程$\{X_n,n\geqslant 0\}$的一步转移概率为

$$P\{X_{(n+1)}=j\mid X_n=i\}=\begin{cases}\bar\lambda, & j=i,i=0,\\ \lambda, & j=i+1,i=0,\\ \bar\lambda\bar\mu+\lambda\mu, & j=i,i\geqslant 1,\\ \lambda\bar\mu, & j=i+1,i\geqslant 1,\\ \bar\lambda\mu, & j=i-1,i\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{6.1.6}$$

从而$\{X_n,n\geqslant 0\}$的(一步)转移概率矩阵为

$$P_X=\begin{bmatrix}\bar\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \bar\lambda\mu & \lambda\mu+\bar\lambda\bar\mu & \lambda\bar\mu & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \bar\lambda\mu & \lambda\mu+\bar\lambda & \bar\mu\lambda & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \bar\lambda\mu & \lambda\mu+\overline{\lambda\mu} & \lambda\bar\mu & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{bmatrix}. \tag{6.1.7}$$

故$\{X_n,n\geqslant 0\}$是齐次不可约非周期马尔可夫链.且由平稳方程定义

$$\pi_k = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j p_{jk}, k \geq 0$$

知

$$\pi_0 = \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1, \tag{6.1.8}$$

$$\pi_k = \pi_{k-1} p_{k-1} + \pi_k \gamma_k + \pi_{k+1} q_{k+1},\ k \geqslant 1, \tag{6.1.9}$$

其中 $r_0 = \bar{\lambda}, p_0 = \lambda, q_k = \bar{\lambda}\mu, \gamma_k = \lambda\mu + \bar{\lambda}\bar{\mu}, p_k = \lambda\bar{\mu},\ k \geqslant 1.$

(6.1.10)

由(6.1.9)与(6.1.8)得

$$q_{k+1} + \pi_{k+1} - p_k\pi_k = q_k\pi_k - p_{k-1}\pi_{k-1} = q_1\pi_1 - p_0\pi_0.$$

从而

$$\pi_k = \frac{p_{k-1}}{q_k}\pi_{k-1} = \frac{p_{k-1}p_{k-2}\cdots p_0}{q_k q_{k-1}\cdots q_1}\pi_0 = \frac{\lambda}{\bar{\lambda}\mu}\left(\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)^{k-1}\pi_0, \quad k \geqslant 1.$$

(6.1.11)

又因当$\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}<1$时，由 $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k = 1$ 得

$$\pi_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu} = 1 - \rho, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{6.1.12}$$

又因，当$\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}<1 \Leftrightarrow \lambda - \lambda\mu < \mu - \mu\lambda \Leftrightarrow \rho < 1$ 从而当 $\rho<1$ 时，过程 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的平稳分布存在且为

$$\begin{cases} \pi_0 = 1 - \rho, \\ \pi_k = \rho\left(1 - \frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)\left(\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)^{k-1}, & k \geqslant 1. \end{cases} \tag{6.1.13}$$

由[1]中定理 3.3.4 知，$\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的极限分布也为{6.1.13}式，即

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \pi_k = \begin{cases} 1-\rho, & k=0 \\ \rho(1-\alpha)\alpha^{k-1}, & k\geqslant 1, \end{cases} \quad \alpha = \frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}.$$

因为

$$\begin{cases} P\{Y_n = 0\} = P\{X_n = 0\} + \mu P\{X_n = 1\}, \\ P\{Y_n = k\} = \bar{\mu}P\{X_n = R\} + \mu P\{X_n = k+1\},\ k\geqslant 1, \end{cases} \tag{6.1.14}$$

令 $n\to\infty$，记$\{Y_n,n\geq 0\}$的平稳分布为$\{\tilde{\pi}_k,k\geq 0\}$，则

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 + \mu\pi_1 = 1-\alpha,$$

$$\tilde{\pi}_k = \bar{\mu}\pi_k + \mu\pi_{k+1} = (1-\alpha)\alpha^k, \quad k\geq 1.$$

所以$\{Y_n,n\geq 0\}$的平稳分布存在，且为

$$\tilde{\pi}_k = (1-\alpha)\alpha^k, \quad k\geq 0. \tag{6.1.15}$$

上式也可通过转移概率矩阵求得.

因为 $P\{Z_n=k\}=P\{X_{n+1}=k\}$，所以$\{Z_n,n\geq 0\}$的平稳分布存在，也由(6.1.13)式给出. 或因

$$P\{Z_n=0\}=\bar{\lambda}P\{Y_n=0\}\to\bar{\lambda}(1-\alpha),$$

当 $k\geq 0$ 时有

$$P\{Z_n=k\}=\bar{\lambda}P\{Y_n=k\}+\lambda P\{Y_n=k-1\}\to\rho(1-\alpha)\alpha^{k-1} \tag{6.1.16}$$

6.1.2 忙期

设 θ 为 Geo/Geo/1 系统的忙期，B 为一个顾客的服务时间，即 $B\sim\text{Geo}(\mu)$. 则有

$$\theta = B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}, \tag{6.1.17}$$

其中 $\theta_1,\theta_2,\theta_3\cdots$相互独立均与 θ 同分布. 用 $\theta(Z)$表示 θ 的 PGF，则由 PGF 定义有

$$\begin{aligned}
\theta(Z) &= \mathrm{E}(Z^\theta) = \mathrm{E}[Z^{B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k E[Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(k)}}]P\{B=k\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^{k} E(Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_j})P\{N(k=j)\}P\{B=k\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k \sum_{j=0}^{k} [\theta(Z)]^j C_k^j \lambda^j \bar{\lambda}^{k-j}\cdot\mu\bar{\mu}^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} Z^k [\lambda\theta(Z)+\bar{\lambda}]^k \mu\bar{\mu}^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu}{\mu} \cdot \frac{[\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}]\bar{\mu}Z}{1 - [\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}]\bar{\mu}Z}$$

$$= \frac{\mu Z[\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}]}{1 - \bar{\mu}Z[\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda}]}. \qquad (6.1.18)$$

由(6.1.17)式与 $E[N(B)] = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$ 得

$$E(\theta) = E[B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}]$$

$$= \frac{1}{\mu} + E(\theta)E[N(B)]$$

$$= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}, \ (\rho < 1). \qquad (6.1.19)$$

由过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 的平稳分布(6.1.3)知 $\pi_0 = 1 - \rho$，且 $\lambda_0 = \lambda$，从而有 $E(\theta) = \frac{1}{\lambda_0}\left(\frac{1}{\pi_0} - 1\right)$，即对于 Geo/Geo/1 系统的嵌入过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$，(2.3.11)式也成立.

由(6.1.18)式通过求导数可求 $D(\theta)$. 现我们用(6.1.17)式求 $D(\theta)$. 由(6.1.17)式，得

$$D(\theta) = D(B) + D[\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}] + 2\mathrm{cov}(B, \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)})$$

$$= \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} + E[N(B)]D(\theta) + D[N(B)]E^2(\theta)$$

$$+ 2\mathrm{cov}(B, \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)})$$

$$= \frac{\bar{\mu}}{\mu^2} + \rho D(\theta) + D[N(B)]\frac{1}{(\mu - \lambda)^2} + 2E[B(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)})]$$

$$- 2\frac{\rho}{\mu(\mu - \lambda)}. \qquad (6.1.20)$$

因为

$$E[N^2(B)] = \sum_{k=1}^{\infty} E[N^2(k)]\mu\bar{\mu}^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} E[k\lambda\bar{\lambda} + k^2\lambda^2]\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$= \rho\bar{\lambda} + \rho^2(\bar{\mu} + 1), \qquad (6.1.21)$$

所以

$$D[N(B)] = \rho\bar{\lambda} + \rho^2(\bar{\mu} + 1) - \rho^2 = \bar{\lambda}\rho + \bar{\mu}\rho^2. \qquad (6.1.22)$$

又因

$$E\{B[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}]\} = \sum_{k=1}^{\infty} kE[\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(k)}]\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} kE[N(k)]E(\theta)\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\mu-\lambda}k^2\mu\bar{\mu}^{k-1} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\cdot\frac{1+\bar{\mu}}{\mu^2}$$

$$= \frac{\lambda+\lambda\bar{\mu}}{\mu^2(\mu-\lambda)},$$

所以

$$\operatorname{cov}(B,\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}) = \frac{\lambda\bar{\mu}}{\mu^2(\mu-\lambda)}. \qquad (6.1.23)$$

将(6.1.22)与(6.1.23)式代入(6.1.20)式得

$$D(\theta) = \frac{1}{1-\rho}\left[\frac{\bar{\mu}}{\mu^2}+\frac{\bar{\lambda}\rho+\bar{\mu}\rho^2}{(\mu-\lambda)^2}+\frac{2\lambda\bar{\mu}}{\mu^2(\mu-\lambda)}\right]$$

$$= \frac{\lambda\bar{\lambda}+\mu\bar{\mu}}{(\mu-\lambda)^3}, \quad \rho<1. \qquad (6.1.24)$$

设 M 为 Geo/Geo/1 排队系统一个忙期 θ 中服务完的顾客数,则

$$M = 1+M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}, \qquad (6.1.25)$$

其中 $M_1, M_2, M_3, \cdots$,相互独立且均与 M 同分布.记 $M(Z)$为 M 的 PGF,则

$$M(Z) = E(Z^M) = ZE[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}}]$$

$$= Z\sum_{k=1}^{\infty} E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_{N(k)}}]\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$= Z\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} E[Z^{M_1+M_2+\cdots+M_j}]P\{N(k)=j\}\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$= Z\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} [M(Z)]^j C_k^j\lambda^j\bar{\lambda}^{k-j}\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$= Z\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda M(Z)+\bar{\lambda}]^k\mu\bar{\mu}^{k-1}$$

$$=Z\frac{\mu}{\mu}\cdot\frac{\bar{\mu}[\lambda M(Z)+\bar{\lambda}]}{1-\bar{\mu}[\lambda M(Z)+\bar{\lambda}]}$$

$$=\frac{\mu Z[\lambda M(Z)+\bar{\lambda}]}{1-\bar{\mu}[\lambda M(Z)+\bar{\lambda}]},\tag{6.1.26}$$

即

$$\lambda\bar{\mu}M^2(Z)+(\lambda\mu Z+\bar{\lambda}\bar{\mu}-1)M(Z)+\bar{\lambda}\mu Z=0.\tag{6.1.27}$$

对上式两边关于 Z 求导数得

$$2\lambda\bar{\mu}M(Z)M'(1)+\lambda\mu M(Z)+(\lambda\mu Z+\bar{\lambda}\bar{\mu}-1)M'(Z)+\bar{\lambda}\mu=0.\tag{6.1.28}$$

故

$$E(M)=M'(1)=\frac{\mu}{\mu-\lambda}=\frac{1}{1-\rho}\ \left(\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1\right).\tag{6.1.29}$$

对(6.1.28)两边再关于 Z 求导数,得

$$2\lambda\bar{\mu}[M'(Z)]^2+2\lambda\bar{\mu}M(Z)M''(Z)+2\lambda\mu M'(Z)$$
$$+(\lambda\mu Z+\bar{\lambda}\bar{\mu}-1)M''(Z)=0.$$

令 $Z=1$ 并注意到 $M'(1)=\frac{1}{1-\rho}$,得

$$2\lambda\bar{\mu}\frac{1}{(1-\rho)^2}+2\lambda\bar{\mu}M''(1)+\frac{2\lambda\mu}{1-\rho}+(\lambda\mu+\bar{\lambda}\bar{\mu}-1)M''(1)=0.$$

从而

$$M''(1)=\frac{2\rho(1-\lambda)}{(1-\rho)^3}.\tag{6.1.30}$$

故

$$D(M)=M''(1)+M'(1)-[M'(1)]^2$$
$$=\frac{\rho^2+\rho(1-2\lambda)}{(1-\rho)^3},\quad\rho<1.\tag{6.1.31}$$

利用(6.1.25)式求 $E(M)$与 $D(M)$更简单.由(6.1.18)式可得

$$\lambda\bar{\mu}z[\theta(Z)]^2+(\lambda\mu Z+\bar{\lambda}\bar{\mu}Z-1)\ \theta(Z)+\bar{\lambda}\mu Z=0.\tag{6.1.32}$$

由(6.1.32)式求 $E(\theta)$与 $D(\theta)$比由(6.1.18)求 $E(\theta)$与 $D(\theta)$简单得多.

6.1.3 等待时间

设 W 为 Geo/Geo/1 排队系统一个顾客的等待时间(的长). 对 FCFS 规则和早到达系统,由于顾客在某时刻(设为 n 时刻)系统的队长(不包括该顾客)为 k 的概率是

$$\lim_{n\to\infty}P\{Y_n=k\}=\left(1-\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)\left(\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)^k$$

(见图 6-2),所以

$$P\{W=0\}=1-\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}.$$

当 $n\geqslant 1$ 时,由全概率公式和定理 1.1.2 以及几何分布的无记忆性得

$$\begin{aligned}P\{W=n\}&=\sum_{k=1}^{n}P\{W=n\mid \text{到达时系统有 } k \text{ 个顾客}\}\\&\quad\cdot\left(1-\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)\left(\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)^k\\&=\sum_{k=1}^{n}P\{B_1+B_2+\cdots+B_k=n\}\left(1-\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)\left(\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)^k\\&=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}\mu^k\bar{\mu}^{n-k}\left(1-\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)\left(\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}\right)^k\\&=(1-\alpha)\mu\alpha\,(\mu\alpha+\bar{\mu})^{n-1},\quad n\geqslant 1,\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\frac{\lambda\bar{\mu}}{\bar{\lambda}\mu}$,即

$$P\{W=n\}=\begin{cases}1-\alpha, & n=0,\\ \mu\alpha(1-\alpha)(\mu\alpha+\bar{\mu})^{n-1}, & n=1,2\cdots.\end{cases}\tag{6.1.33}$$

从而

$$E(W)=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{W=n\}=\frac{\alpha}{\mu(1-\alpha)}.\tag{6.1.34}$$

现考虑 LCFS 规则下的等待时间. 设 W 为 Geo/Geo/1 排队系统一个顾客的等待时间,由于几何分布的无记忆性和(6.1.17)式,有

$$W=\begin{cases}0, & \text{以概率 } 1-\alpha\\ B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}=\theta, & \text{以概率 } \alpha.\end{cases} \tag{6.1.35}$$

所以 W 的 PGF $W(Z)$ 为

$$W(Z)=E[Z^W]=1-\alpha+\alpha\theta(Z). \tag{6.1.36}$$

故

$$W'(Z)=\alpha\theta'(Z),W''(Z)=\alpha\theta''(Z).$$

从而

$$E(W)=W'(1)=\frac{\alpha}{\mu-\lambda},\ \rho<1, \tag{6.1.37}$$

$$\begin{aligned}D(W)&=W''(1)+W'(1)-[W'(1)]^2\\&=\alpha\theta''(1)+\alpha\theta'(1)-\alpha^2[\theta'(1)]^2\\&=\alpha D(\theta)+(\alpha-\alpha^2)[\theta'(1)]^2\\&=\frac{\alpha(\lambda\bar{\lambda}+\mu\bar{\mu})}{(\mu-\lambda)^3}+\frac{\alpha-\alpha^2}{(\mu-\lambda)^2}\\&=\frac{\alpha(\lambda\bar{\lambda}+\mu\bar{\mu}+\mu-\lambda-\mu\alpha+\lambda\alpha)}{(\mu-\lambda^3)}.\end{aligned} \tag{6.1.38}$$

§ 6.2 Geo/Geo/m 排队系统($m\geqslant1$)

系统 Geo/Geo/m 的到达间隔时间序列 $\{J_n,n\geqslant1\}$ 仍为 i.i.d 随机变量序列且 $J_n\sim\text{Geo}(\lambda)$. 服务机构有 m 个服务台,每个服务台的服务时间(对每个顾客的服务时间)相互独立同分布,且均服从参数为 μ 的几何分布. 仍用 B 表示每个服务台对每个顾客的服务时间. 由假设知 $B\sim\text{Geo}(\mu)$,并设到达间隔时间序列与各个服务台的服务时间相互独立,每个服务台的所有服务时间也相互独立同分布.

(1)队长的平稳分布

仍以 X_n,Y_n,Z_n 分别表示早到达系统 Geo/Geo/m 在 $n-,n,n+$ 时系统中的顾客数,因为

$$p_{ij}=P\{X_{n+1}=j\mid X_n=i\}=\begin{cases}\bar{\lambda}C_i^{i-j}\mu^{i-j}\bar{\mu}^{j}+\lambda C_i^{i-j+1}\mu^{i-j+1}\bar{\mu}^{j-1}, \\ \qquad 0\leqslant j\leqslant i\leqslant m-1, \\ \lambda\bar{\mu}^{i}, \quad j=j+1,\ 0\leqslant i\leqslant m-1, \\ \bar{\lambda}C_m^{i-j}\mu^{i-j}\bar{\mu}^{m+j-i}+\lambda C_m^{i+1-j}\mu^{i+1-j}\bar{\mu}^{m+j-i-1}, \\ \qquad i-m\leqslant j\leqslant i, \quad i\geqslant m \\ \lambda\bar{\mu}^{m}, \quad j=i+1, \quad i\geqslant m, \\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

(6.2.1)

(这里应用到一般规定：当 $j>m$ 时 $C_m^j=0$). 从而知系统 Geo/Geo/m 的嵌入过程$\{X_n, n\geqslant 0\}$是齐次马氏链. 在

$p_{ij}=\bar{\lambda}C_m^{i-j}\mu^{i-j}\bar{\mu}^{m+j-i}+\lambda C_m^{i+1+j}\mu^{i+1-j}\bar{\mu}^{m+j-i-1}$, $i\geqslant m$, $i-m\leqslant j\leqslant i$

中令 $i+1-j=k$, 则

$$\begin{aligned}&\bar{\lambda}C_m^{i-j}\mu^{i-j}\bar{\mu}^{m+j-i}+\lambda C_m^{i+1-j}\mu^{i+1-j}\bar{\mu}^{m+j-i-1}\\ &=\lambda C_m^k\mu^k\bar{\mu}^{m-k}+\bar{\lambda}C_m^{k-1}\mu^{k-1}\bar{\mu}^{m-(k-1)}, k=0,1,2,\cdots,m+1.\end{aligned}$$

注意到：$C_m^{-1}=C_m^{m+1}=0$. 记

$$\beta_k=\lambda C_m^k\mu^k\bar{\mu}^{m-k}+\bar{\lambda}C_m^{k-1}\mu^{k-1}\bar{\mu}^{m-(k-1)}, k=0,1,\cdots,m+1.$$

(6.2.2)

则$\{X_n, n\geqslant 0\}$的转移概率矩阵为

$$p=\begin{bmatrix}p_{00} & p_{01} & 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \quad 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{m-1,0} & p_{m-1,1}\cdots\cdots p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} \quad 0\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{m+1} & \beta_m\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1\beta_0 & 0\cdots\cdots\cdots \\ 0 & \beta_{m+1} \quad \beta_m\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1\beta_0 & 0\cdots\cdots \\ 0 & 0 \quad \beta_{m+1}\ \beta_m\cdots\cdots\cdots\cdots\beta_1\beta_0 & 0\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{bmatrix}.$$

(6.2.3)

由此知$\{X_n, n\geqslant 0\}$是不可约非周期齐次马氏链. 由平稳分布定义，有

$$\begin{cases} \pi_0 = \sum_{i=0}^{m-1} \pi_i p_{i0} + \pi_m \beta_{m+1}, \\ \pi_k = \pi_k - p_{k-1,k} + \sum_{i=k}^{m-1} \pi_i p_{ik} + \sum_{i=m}^{m+1} \pi_i \beta_{i-k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \\ \pi_k = \sum_{i=0}^{m-1} \pi_{k-1+i} \beta_i, \quad k > m. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

在 $\pi_k = \sum_{i=0}^{m+1} \pi_{k-1+i} \beta_i, k > m$ 中令 $\pi_k = \sigma^k$,得

$$\sigma^k = \sum_{i=0}^{m+1} \sigma^{k-1+i} \beta_i.$$

从而

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{m+1} \sigma^i \beta_i \qquad (6.2.5) \\ &= \sum_{i=0}^{m+1} \sigma^i \left[\lambda C_m^i \mu^i \overline{\mu}^{m-i} + \overline{\lambda} C_m^{i-1} \mu^{i-1} \overline{\mu}^{m+1-i} \right] \\ &= \lambda (\mu\sigma + \overline{\mu})^m + \overline{\lambda}\sigma (\mu\sigma + \overline{\mu})^m, \end{aligned}$$

即

$$\sigma = (\lambda + \overline{\lambda}\sigma)(\mu\sigma + \overline{\mu})^m. \tag{6.2.6}$$

解方程(6.2.6)可得 σ 的一个根($0<\sigma<1$),由此得

$$\pi_k = C\sigma^k, \quad k = m, m+1, \cdots. \tag{6.2.7}$$

所以$\{X_n, n \geqslant 0\}$的平稳分布为

$$\{\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{m-1}, C\sigma^m, C\sigma^{m+1}, \cdots\}, \quad 0<\sigma<1. \tag{6.2.8}$$

由(6.2.4)的第二式得

$$\begin{aligned} \pi_{k-1} &= \frac{\pi_k - \sum_{i=k}^{m-1} \pi_i p_{ik} - \sum_{i=m}^{m+1} \pi_i \beta_{i-k+1}}{p_{k-1,k}} \\ &= \frac{1}{\lambda \overline{\mu}^{k-1}} \left[\pi_k - \sum_{i=k}^{m-1} \pi_i p_{ik} - \sum_{i=m}^{m+1} \pi_i \beta_{i-k+1} \right], \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

再由 $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=1$ 可确定 C，从而可得 $\{Z_n, n\geqslant 0\}$ 的平稳分布. 因为当 $0\leqslant k\leqslant m$ 时

$$
\begin{aligned}
P\{Y_n=k\} &= \sum_{i=k}^{m} P\{X_n=i\} C_i^{i-k}\mu^{i-k}\bar{\mu}^k \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} P\{X_n=m+i\} C_m^{m+i-k}\mu^{m+i-k}\bar{\mu}^{k-i} \\
&\to \sum_{i=k}^{m}\pi_i C_i^{i-k}\mu^{i-k}\bar{\mu}^k + \sum_{i=1}^{k}\pi_{m+i}C_m^{m+i-k}\mu^{m+i-k}\bar{\mu}^{k-i}.
\end{aligned}
\tag{6.2.10}
$$

当 $k\geqslant m+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
P\{Y_n=k\} &= \sum_{i=k-m}^{m} P\{X_n=m+i\} C_m^{m+i-k}\mu^{m+i-k}\bar{\mu}^{k-i} \\
&\to \sum_{i=k-m}^{k}\pi_{m+i}C_m^{i+m-k}\mu^{m+i-k}\bar{\mu}^{k-i},
\end{aligned}
\tag{6.2.11}
$$

所以当$(0<\sigma<1)$时依照 (6.2.10)与(6.2.11)式由 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的平稳分布 $\{\pi_k, k\geqslant 0\}$ 可求得 $\{Y_n, n\geqslant 0\}$ 的平稳分布 $\{\tilde{\pi}_k, k\geqslant 0\}$.

(2) $k(k\geqslant 0)$阶忙期

对 Geo/Geo/m 排队系统，我们现讨论其中 $k(k\geqslant 0)$阶忙期的分布. 系统 Geo/Geo/m 的 k 阶忙期定义为：从有 k 个顾客在等待服务时起，一直到首次有一个服务台空闲时止这段时间，记为 A_k. 而 A_0 是指系统中有 m 个顾客时起一直到首次有一个服务台空闲时止这段时间.

先来求 A_0 的 PGF. 因为 m 个服务台独立工作每个服务台的服务时间都服从参数为 μ 的几何分布，由于几何分布的无记忆，当 m 个服务台都进入工作后，这 m 个服务台可以看成服务时间为 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{B_i\}$ 的一个服务台(其中 B_i 为第 i 个服务台的服务时间). 由定理 1.1.5 的(2)知 $V=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{B_i\}\sim \text{Geo}(1-\bar{\mu}^m)$. 从而 A_0 可以看成服务时间为 $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{B_i\}$，到达间隔时间服从参数为 λ 的几

何分布的 Geo/Geo/1 排队系统的忙期再由(6.1.18)式知 A_0 的 PGF 为

$$A_0(Z)=\frac{(1-\bar{\mu}^m)Z[\lambda A_0(Z)+\bar{\lambda}]}{1-\bar{\mu}^m Z[\lambda A_0(Z)+\bar{\lambda}]},\ \lambda<1-\bar{\mu}^m, \qquad (6.2.12)$$

从而

$$E(A_0)=\frac{1}{1-\bar{\mu}^m-\lambda},\ \frac{\lambda}{1-\bar{\mu}^m}<1, \qquad (6.2.13)$$

$$D(A_0)=\frac{\lambda\bar{\lambda}+(1-\bar{\mu}^m)\bar{\mu}^m}{(1-\bar{\mu}^m-\lambda)^3},\ \frac{\lambda}{1-\bar{\mu}^m}<1. \qquad (6.2.14)$$

设 M_0 为在一个零阶忙期中服务完的顾客数,则由(6.1.26)式,M_0 的 PGF 为

$$M_0(Z)=\frac{(1-\bar{\mu}^m)Z[\lambda M_0(Z)+\bar{\lambda}]}{1-\bar{\mu}^m[\lambda M_0(Z)+\bar{\lambda}]}, \qquad (6.2.15)$$

且

$$E(M_0)=\frac{1-\bar{\mu}^m}{1-\bar{\mu}^m-\lambda},\ \lambda<1-\bar{\mu}^m, \qquad (6.2.16)$$

$$D(M_0)=\frac{\tilde{\rho}^2+\tilde{\rho}(1-2\lambda)}{(1-\tilde{\rho})^3},\ \tilde{\rho}\equiv\frac{\lambda}{1-\bar{\mu}^m}<1. \qquad (6.2.17)$$

因为有

$$A_k=A_{00}+A_{01}+\cdots+A_{0k}, \qquad (6.2.18)$$

其中 A_{0j}表示从系统 Geo/Geo/m 中有 $k-j$ 个顾客在等待服务时起一直到有 $k-j-1$ 个顾客在等待服务时止这段时间,$j=0,1\cdots,k$,其中 -1 个顾客在等待服务表示有一个服务台空闲.由于独立假设和几何分布的无记忆性知 $A_{00},A_{01},\cdots,A_{0k}$相互独立且均与 A_0 同分布.所以 A_k 的 PGF 为

$$A_k(Z)=[A_0(Z)]^{k+1},\lambda<1-\bar{\mu}^m. \qquad (6.2.19)$$

$A_0(Z)$由(6.2.12)式确定.从而

$$E(A_k)=(k+1)/(1-\bar{\mu}^m-\lambda),\lambda<1-\bar{\mu}^m, \qquad (6.2.20)$$

$$D(A_k)=\frac{(k+1)[\bar{\mu}^m(1-\bar{\mu}^m)+\lambda\bar{\lambda}]}{(1-\bar{\mu}^m-\lambda)^3},\qquad \lambda<1-\bar{\mu}^m. \tag{6.2.21}$$

设 M_k 为在一个 A_k 中服务完的顾客数,易见,M_k 的 PGF 为

$$M_k(Z)=[M_0(Z)]^{k+1},\lambda<1-\bar{\mu}^m, \tag{6.2.22}$$

其中 $M_0(Z)$由(6.2.15)式确定,且

$$E(M_k)=(k+1)E(M_0),D(M_k)=(k+1)D(M_0). \tag{6.2.23}$$

(3)等待时间

设 W 为 Geo/Geo/m 排队系统中一个顾客的等待时间(的长),在平稳条件满足下,即 $0<\tilde{\rho}<1$ 下,当该顾客到达时队长为 k $(k\geqslant 0)$的概率为 $\tilde{\pi}_k$,$\tilde{\pi}_k$ 由$\{\pi_k,k\geqslant 0\}$确定,而$\{\pi_k,k\geqslant 0\}$为嵌入过程$\{X_n,n\geqslant 0\}$的平稳分布,由本节的(1)确定.于是有

$$P\{W=0\}=\sum_{k=0}^{m-1}\tilde{\pi}_k, \tag{6.2.24}$$

$$P\{W=n\}=\sum_{k=m}^{n+m-1}P\left\{\sum_{i=1}^{k-m+1}V_i=n\right\}\tilde{\pi}_k,\qquad n=1,2,\cdots, \tag{6.2.25}$$

其中 $V_1,V_2,V_3\cdots$ 相互独立,均与 $V\sim \text{Geo}(1-\bar{\mu}^m)$同分布.由定理 1.1.2 知 $\sum_{i=1}^{k-m+1}V_i$ 服从负二项分布(巴斯卡分布):

$$P\left\{\sum_{i=1}^{k-m+1}V_i=n\right\}=C_{n-1}^{k-m}(1-\bar{\mu}^m)^{k-m+1}(\bar{\mu}^m)^{n+m-k-1}, \tag{6.2.26}$$

即 $$P\{W=n\}=\sum_{k=m}^{n+m-1}C_{n-1}^{k-m}(1-\bar{\mu}^m)^{k-m+1}(\bar{\mu}^m)^{n+m-k-1}\tilde{\pi}_k,$$
$$n=1,2,3\cdots. \tag{6.2.27}$$

§ 6.3 Geo/G/1 排队系统

系统 Geo/G/1 与系统 Geo/Geo/1 的惟一区别是系统 Geo/G/1 的服务时间 B 服从取正整数值的一般分布. 设 $g_k = P\{B = k\}, k = 1,2,3\cdots, E(B) = \frac{1}{\mu}, E(B^2) = b^{(2)}$.

6.3.1 队长的平稳分布

设 Q_n 表示迟到达延迟进入系统 Geo/G/1 中第 n 个顾客服务完(离开系统)时系统中的顾客数. A_n 为第 n 个顾客服务期间到达系统中的顾客数, B_n 为第 n 个顾客服务时间, B_n 与 B 同分布. 因为

$$A_{n+1} = N(B_{n+1}), \tag{6.3.1}$$

$$Q_{n+1} = Q_n - \varepsilon(Q_n) + A_{n+1}, \tag{6.3.2}$$

其中

$$\varepsilon(X) = \begin{cases} 0, & X \leqslant 0, \\ 1, & X > 0, \end{cases} \tag{6.3.3}$$

从而 A_{n+1} 的 PGF(记为 $A(Z)$)为

$$\begin{aligned} A(Z) &= E[Z^{A_{n+1}}] = E[Z^{N(B)}] = \sum_{n=1}^{\infty} E[Z^{N(n)}]P\{B = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} Z^k P\{N(n) = k\}P\{B = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} Z^k C_n^k \lambda^k \bar{\lambda}^{n-k} P\{B = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\lambda z + \bar{\lambda}]^n P\{B = n\} \\ &= B(\lambda Z + \bar{\lambda}), \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

其中 $B(Z)$为 B 的 PGF. 由(6.3.2)式得

$$\begin{aligned} P\{Q_{n+1} = j \mid Q_n = i\} &= P\{A_{n+1} = j + \varepsilon(i) - i\} \\ &= P\{N(B) = j + \varepsilon(i) - i\} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} P\{N(B) = j + 1 - i\}, \ i \geqslant 1 \\ P\{N(B) = j\}, i = 0. \end{cases} \tag{6.3.5}$$

从而知嵌入过程 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 是齐次马氏链. 设 $k_j = P\{N(B) = j\}, j \geqslant 0$, 则 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 的转移概率矩阵为

$$P_Q = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \tag{6.3.6}$$

易见

$$k_j = P\{N(B) = j\} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^j \lambda^j \bar{\lambda}^{n-j} g_n, g_n = P\{B = n\}. \tag{6.3.7}$$

由(6.3.6)式易证:

(a) $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 是不可约的 $\Leftrightarrow 0 < k_0 \leqslant k_0 + k_1 < 1$,

(b) 如果 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 是不可约的, 则 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 是非周期的.

证 (a) 设 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 是不可约的, 如果 $k_0 = 0$,, 则 $p_{ij} \triangleq p\{Q_{n+1} = j \mid Q_n = i\}$ 对于所有 $j < i$ 均为 0, 于是对 $j < i, i \rightarrow j$, $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 不是不可约的.

如果 $k_0 + k_1 = 1$, 则对于 $i > 1$ 有 $p_{0i} = 0$ 且 $p_{1i} = 0$, 这样不能由 0 或 1 到达 $i(>1)$. 于是 $\{Q_n, n \geqslant 1\}$ 不是不可约的. 反之设 $0 < k_0 < 1$ 且 $0 < k_0 + k_1 < 1$, 则至少存在一个正整数 $r > 1$ 使得 $k_r > 0$, 首先对任意 $j < i, p_{ij}(i-j) = k_0^{i-j} > 0$, 于是 $i \rightarrow j$. 如果 $j > i > 1$, 则总能找到 k 与 l 使得 $P_{ij}(k+l) = k_r^k k_0^l > 0$, 例如, 设 $j = 5, i = 2, r = 3$, 则

$$i \xrightarrow{k_r} i + r - 1 = 4 \xrightarrow{k_r} i + 2(r-1) = 6 \xrightarrow{k_0} i + 2(r-1) - 1 = 5,$$

即 $p_{25}(2+1) = k_r^2 k_0^1 > 0, k = 2, l = 1$. 所以 $2 \rightarrow 5$. 又如设 $i = 5, j = 7, r = 2$, 则 $5 = i \xrightarrow{k_r} i + r - 1 = 6 \xrightarrow{k_r} i + 2(r-1) = 7 = j$,

即 $p_{57}(2+0)=k_r^2k_0^0=k_r^2>0$. 所以 $5\to7$, 当 $i=0$ 时, 也可找到 k 与 l, 使得 $p_{ij}(1+k+l)=k_r^{1+k}k_0^l>0$.

例如, 设 $i=0, j=3, r=5$, 则 $i\xrightarrow{k_r}r=5\xrightarrow{k_0}r-1=4\xrightarrow{k_0}r-2=3$, 即 $p_{03}(1+2)=k_r^1k_r^2>0$, $k=0$, $l=2$, 所以 $0\to3$. 又如设 $i=0, j=6, r=2$, 则 $i\xrightarrow{k_r}r=2\xrightarrow{k_r}r+r-1=3\xrightarrow{k_r}r+3(r-1)=4\xrightarrow{k_r}r+3(r-1)=5=j\xrightarrow{k_r}r+4(r-1)=6=j$, 即 $p_{06}(1+4=0)=k_r^5k_0^0=k_r^5>0$ 所以 $0\to6$. 又因 $p_{00}=k_0>o$, 当 $i\geqslant1$ 时 $p_{ii}(r)=k_rk_0^{r-1}>0$, 所以对任意 $i\geqslant0$, 有 $i\leftrightarrow i$. 从而对任意 $i,j\geqslant0$, 有 $i\leftrightarrow j$. 于是 $\{Q_n,n\geqslant1\}$ 是不可约的.

(b) 因为 $\{Q_n,n\geqslant1\}$ 是不可约的, 又因 $p_{00}=k_0>0$ 所以 0 是非周期的, 从而 $\{Q_n,n\geqslant1\}$ 是非周期的.

由(6.3.6)式与平稳分布定义, 得

$$\pi_j=\pi_0k_j+\sum_{i=1}^{j+1}\pi_ik_{j-i+1},\ j\geqslant0. \tag{6.3.8}$$

设 $\{Q_n,n\geqslant1\}$ 的平稳分布 $\{\pi_j,j\geqslant0\}$ 的概率母函数为 $Q(Z)$, 则

$$\begin{aligned}Q(Z)&=\sum_{j=0}^{\infty}Z^j\pi_j=\pi_0\sum_{j=0}^{\infty}k_jZ^j+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j+1}\pi_ik_{j-i+1}Z_j\\&=\pi_0B(\lambda Z+\overline{\lambda})+\sum_{j=0}^{\infty}Z^j\sum_{m=0}^{j}\pi_{m+1}k_{j-m}\\&=\pi_0B(\lambda Z+\overline{\lambda})+\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=m}^{\infty}\pi_{m+1}Z^jk_{j-m}\Big)\\&=\pi_0B(\lambda Z+\overline{\lambda})+\sum_{m=0}^{\infty}\pi_{m+1}\sum_{i=0}^{\infty}Z^{m+i}k_i\\&=\pi_0B(\lambda Z+\overline{\lambda})+\sum_{m=0}^{\infty}\pi_{m+1}Z^mB(\lambda Z+\overline{\lambda}),\\&=\pi_0B(\lambda Z+\overline{\lambda})+[Q(Z)-\pi_0]\frac{B(\lambda Z+\overline{\lambda})}{Z}\end{aligned}$$

即

$$Q(Z)=\frac{\pi_0(1-Z)B(\lambda Z+\overline{\lambda})}{B(\lambda Z+\overline{\lambda})-Z}. \tag{6.3.9}$$

令 $Z=1$,可得
$$\pi_0=1-\frac{\lambda}{\mu}. \tag{6.3.10}$$

因为 π_0 为概率,所以 $0\leqslant\pi_0=1-\frac{\lambda}{\mu}\leqslant 1$. 但是当 $\pi_0=0$ 时,$Q(Z)\equiv 0$,平稳分布不存在,当 $\pi_0=1$ 时,$0=\pi_1=\pi_2=\pi_3=\cdots$. 所以这时平稳也不存在. 故只有当 $0<1-\frac{\lambda}{\mu}<1$ 时即当 $0<\frac{\lambda}{\mu}<1$ 时平稳分布存在,且其 PGF 由(6.3.9)式给出. 从而 $\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}P\{Q_n=j\}$,记 $P\{Q=j\}=\pi_j$. 则

$$E(Q)=Q'(1)=\rho+\frac{\lambda^2\left(b^{(2)}-\frac{1}{\mu}\right)}{2(1-\rho)},\quad \rho\equiv\frac{\lambda}{\mu}<1. \tag{6.3.11}$$

平均排(等待)队长为

$$E(Q_q)=\frac{\lambda^2\left(b^{(2)}-\frac{1}{\mu}\right)}{2(1-\rho)},\quad \rho\equiv\frac{\lambda}{\mu}<1. \tag{6.3.12}$$

现考虑早到达系统 Geo/G/1 的队长的平稳分布. 设 R_n 为早到达系统 Geo/G/1 中第 n 个顾客服务完离开系统时系统中的顾客数,则

$$R_{n+1}=\begin{cases}R_n-1+A_{n+1}, & \text{当 } R_n\geqslant 1 \text{ 时},\\ C_{n+1}, & \text{当 } R_n=0 \text{ 时},\end{cases} \tag{6.3.13}$$

其中 C_{n+1}为在 $R_n=0$ 条件下,第 $n+1$ 个顾客服务时间中到达的顾客. 记 $P\{C_{n+1}=j\}=c_j, j\geqslant 0$ 则因为系统是早到达的,在 $R_n=0$ 的条件下,第 $n+1$ 个顾客在第 n 个顾客离开系统后某时刻 S 到达,即在$(S,S+)$中到达,因此在$(S+,S+1)$中不可能再有顾客到达. 又因第 $n+1$ 个到达后(因 $R_n=0$)立刻进入服务,所以在他服务的第 1 个单位时间中,即在$(S,S+1)$中不可能有(除他外)顾客到达. 从而

$$C_j=P\{C_{n+1}=j\}=P\{N(B_{n+1})=j\mid R_n=0\}$$

$$= \sum_{k=j+1}^{\infty} P\{N(k-1) = j\} g_k = \sum_{k=j+1}^{\infty} C_{k-1j} \lambda^j \bar{\lambda}^{k-1-j} g_k. \quad (6.3.14)$$

C_{n+1}的 PGF 为

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} Z^j C_j &= \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \sum_{k=j+1}^{\infty} C_{k-1}^j \lambda^j \bar{\lambda}^{k-1-j} g_k \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} Z^j \sum_{i=j}^{\infty} C_i^j \lambda^j \bar{\lambda}^{i-j} g_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} C_i^j (\lambda Z)^j \bar{\lambda}^{i-j} \right) g_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda Z + \bar{\lambda})^i g_{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda Z + \bar{\lambda})^{i+1} g_{i+1} / (\lambda Z + \bar{\lambda}) \\
&= \frac{B(\lambda Z + \bar{\lambda})}{\lambda Z + \bar{\lambda}}. \quad (6.3.15)
\end{aligned}$$

由(6.3.13)式得

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= P\{R_{n+1} = j \mid R_n = i\} \\
&= \begin{cases} P\{A_{n+1} = j+1-i\} = k_{j+1-i}, i \geqslant 1 \\ P\{C_{n+1} = j\} = C_j, i = 0. \end{cases} \quad (6.3.16)
\end{aligned}$$

由(6.3.14)与(6.3.16)式知嵌入过程$\{R_n, n \geqslant 1\}$是齐次马氏链，且其转移概率矩阵为

$$P_R = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}. \quad (6.3.17)$$

类似于过程$\{Q_n, n \geqslant 1\}$的讨论，对于过程$\{R_n, n \geqslant 1\}$有如下结论：

(a) $\{R_n, n \geqslant 1\}$是不可约的$\Leftrightarrow 0 < k_0 \leqslant k_0 + k_1 < 1$.

(b)如果$\{R_n, n\geq 1\}$是不可约的,则$\{R_n, n\geq 1\}$是非周期的.

(c)如果$0<\frac{\lambda}{\mu}<1$,则$\{R_n, n\geq 1\}$的平稳分布存在.

由平稳分布定义有

$$\pi_j = \pi_0 c_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i k_{j+1-i}, \quad j \geq 0. \tag{6.3.18}$$

记$\{R_n, n\geq 1\}$的平稳分布的 PGF 为 $R(Z)$,由(6.3.18)式,用类似于求(6.3.9)式的方法,可得

$$R(Z) = \frac{\pi_0 \bar{\lambda}(1-Z)B(\lambda Z+\bar{\lambda})}{(\lambda Z+\bar{\lambda})[B(\lambda Z+\bar{\lambda})-Z]},$$

其中 $\pi_0 = \frac{1-\rho}{\bar{\lambda}}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}$,即

$$R(Z) = \frac{(1-\rho)(1-Z)B(\lambda Z+\bar{\lambda})}{(\lambda Z+\bar{\lambda})[B(\lambda Z+\bar{\lambda})-Z]}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1. \tag{6.3.19}$$

从而得平均队长

$$E(R) = R'(1) = \frac{\lambda^2\left[b^{(2)} - \frac{1}{\mu}\right]}{2(1-\rho)} + \rho - \lambda, \quad \rho < 1. \tag{6.3.20}$$

6.3.2 忙期

设 θ 为迟到达延迟进入系统 Geo/G/1 的忙期(的长),则

$$\theta = B + \theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_{N(B)}. \tag{6.3.21}$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots$为相互独立且均与 θ 同分布的随机变量,记 θ 的 PGF 为 $\theta(Z)$.则

$$\begin{aligned}
\theta(Z) &= E[Z^{B+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B)}}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Z^n E[Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(n)}}] g_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} Z^n \sum_{i=0}^{\infty} E[Z^{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_i}] C_n^i \lambda^i \bar{\lambda}^{n-i} g_n, (\theta_0 = 0)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Z^n (\lambda\theta(Z) + \bar{\lambda})^n g_n$$

$$= B[\lambda Z\theta(Z) + \bar{\lambda}Z]. \qquad (6.3.22)$$

故

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu - \lambda}, \lambda < \mu. \qquad (6.3.23)$$

因为 $\lambda_0 = \lambda$，所以对于迟到达延迟服务系统 Geo/G/1(2.3.11)式也成立.因为

$$\theta''(1) = \frac{\mu b^{(2)} - 1 + 2\rho - 2\rho^2}{\mu (1-\rho)^3}, \quad \rho < 1, \qquad (6.3.24)$$

所以

$$D(\theta) = \theta''(1) + \theta'(1) - [\theta'(1)]^2 = \frac{\mu^2 b^{(2)} - \mu\rho^2 - 1 + \rho}{\mu^2 (1-\rho)^3}, \ \rho < 1, \qquad (6.3.25)$$

设 M 为一个 θ 中服务完的顾客数.则

$$M = 1 + M_1 + M_2 + \cdots + M_{N(B)},$$

其中 $M_1, M_2, M_3 \cdots$ 相互独立且均与 M 同分布.从而 M 的 PGF 为

$$M(Z) = E[Z^{1+M_1+M_2+\cdots+M_{N(B)}}]$$

$$= ZB[\lambda M(Z) + \bar{\lambda}]. \qquad (6.3.26)$$

故

$$E(M) = \frac{1}{1-\rho}, \quad \rho < 1. \qquad (6.3.27)$$

由(6.3.25)式知

$$D(M) = E[N(B)]D(M) + D[N(B)][E(M)]^2$$

$$= \rho D(M) + \frac{D[N(B)]}{(1-\rho)^2} = \frac{D[N(B)]}{(1-\rho)^3}, \quad \rho < 1. \qquad (6.3.28)$$

因为

$$E[N^2(B)] = \sum_{N=1}^{\infty} g_n E[N^2(n)] = \sum_{N=1}^{\infty} g_n [n\lambda + n(n-1)\lambda^2]$$

$$=\rho+\lambda^2\left[b^{(2)}-\frac{1}{\mu}\right]=\rho+\lambda^2 b^{(2)}-\lambda\rho$$

$$=\lambda^2 b^{(2)}+\bar{\lambda}\rho, \tag{6.3.29}$$

所以

$$D[N(B)]=\lambda^2 b^{(2)}+\bar{\lambda}\rho-\rho^2, \quad \rho<1. \tag{6.3.30}$$

故

$$D(M)=\frac{\lambda^2 b^{(2)}+\bar{\lambda}\rho-\rho^2}{(1-\rho)^3}, \quad \rho<1. \tag{6.3.31}$$

6.3.3 等待时间的分布

设 W,T 分别为 Geo/G/1 排队系统一个顾客的等待时间与逗留时间,对 FCFS 的迟到达延迟进入系统有

$$Q(Z)=E(Z^{N(T)}). \tag{6.3.32}$$

记 $T(Z)=E(Z^T)$.因为

$$E[Z^{N(T)}]=\sum_{N=1}^{\infty}E[Z^{N(n)}]P\{T=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda Z+\bar{\lambda}]^N P[T=n]$$

$$=T(\lambda Z+\bar{\lambda}), \tag{6.3.33}$$

由(6.3.32)式得

$$T(\lambda Z+\bar{\lambda})=Q(Z)=\frac{(1-\rho)(1-Z)B(\lambda Z+\bar{\lambda})}{B(\lambda Z+\bar{\lambda})-Z}.$$

令 $\lambda Z+\bar{\lambda}=s$ 得 $T(s)=\dfrac{(1-\rho)(1-Z)B(s)}{\lambda B(s)+\bar{\lambda}-s}$再把 s 换成 z,得

$$T(Z)=\frac{(1-\rho)(1-Z)B(Z)}{\lambda B(Z)+\bar{\lambda}-Z}. \tag{6.3.34}$$

又因 $T=W+B$ 且 W 与 B 独立,所以 W 的 PGF 为

$$W(Z)=\frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda B(Z)+\bar{\lambda}-Z}. \tag{6.3.35}$$

因为 $Q=N(T)=N(W+B)$,所以 $E(Q)=E[N(T)]=\lambda E(T)$,故由(6.3.11)式得

$$E(T)=\frac{E(Q)}{\lambda}=\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda b^{(2)}-\rho}{2(1-\rho)}, \quad \rho<1. \tag{6.3.36}$$

从而得

$$E(W)=E(T)-E(B)=\frac{\lambda b^{(2)}-\rho}{2(1-\rho)}. \qquad (6.3.37)$$

因为

$$\begin{aligned}E[N^2(T)] &= \sum_{n=1}^{\infty}E[N^2(n)]P\{T=n\}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}[n\lambda+n(n-1)\lambda^2]P\{T=n\}\\ &= \lambda E(T)+\lambda^2[E(T^2)-E(T)]\\ &= E(Q)+\lambda^2E(T^2)-\lambda E(Q)\\ &= \bar{\lambda}E(Q)+\lambda^2E(T^2),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}D(Q) &= D[N(T)] = E[N^2(T)]-\{E[N(T)]\}^2\\ &= E(Q)\bar{\lambda}+\lambda^2E(T^2)-\lambda^2[E(T)]^2\\ &= \bar{\lambda}E(Q)+\lambda^2D(T),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}D(T) &= \frac{1}{\lambda^2}[D(Q)-\bar{\lambda}E(Q)]\\ &= \frac{D(Q)}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda\mu}-\frac{\bar{\lambda}\left(b^{(2)}-\frac{1}{\mu}\right)}{2(1-\rho)}, \qquad (6.3.38)\end{aligned}$$

$$D(W)=D(T)-D(B)=D(T)-b^{(2)}-\frac{1}{\mu^2}. \qquad (6.3.39)$$

设 W 为迟到达延迟进入系统 Geo/G/1 中一个顾客在 LCFS 规则下的等待时间，则有

$$W=B_++\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B_+)},\quad W>0, \qquad (6.3.40)$$

其中 B_+ 为 B 的剩余寿命，由(3.3.51)式知，B_+ 的 PGF 为

$$B_+(Z)=\frac{\mu[1-B(Z)]}{1-Z}. \qquad (6.3.41)$$

从而

$$E(B_+)=B'_+(1)=\frac{\mu b^2-1}{2}. \qquad (6.3.42)$$

所以 W 的 PGF 为(由(6.3.10))

$$\begin{aligned} W(Z) &= E(Z^W) = 1-\rho+\rho E[Z^{B_++\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{N(B_+)}}] \\ &= 1-\rho+\rho B_+[\lambda Z\theta(Z)+\bar{\lambda}Z] \\ &= 1-\rho+\frac{\lambda-\lambda B[\lambda Z\theta(Z)+\bar{\lambda}Z]}{1-\lambda Z\theta(Z)-\bar{\lambda}Z}, \quad \rho<1. \qquad (6.3.43) \end{aligned}$$

由(6.3.40)与(6.3.42)式得

$$\begin{aligned} E(W) &= \rho[E(B_+)+E(\theta)\lambda E(B_+)] = \rho\left[E(B_+)+\frac{\lambda E(B_+)}{\mu-\lambda}\right] \\ &= \rho E(B_+)\frac{\mu}{\mu-\lambda}=\frac{\lambda b^{(2)}-\rho}{2(1-\rho)}, \ \rho<1. \qquad (6.3.44) \end{aligned}$$

§ 6.4 $\mathrm{Geo}^{\xi}/G/1$ 排队系统

系统 Geo/G/1 与系统 $\mathrm{Geo}^{\xi}/G/1$ 的惟一区别是系统 $\mathrm{Geo}^{\xi}/G/1$ 每次到达的顾客数不是一个,而是一批(ξ 个). ξ 为取正整数值的一般随机变量,$E(\xi)=r$,$D(\xi)=\sigma_r^2$,且设 ξ 与诸 B_n、诸 J_n 相互独立,各次到达的顾客数相互独立同分布.

6.4.1 队长的平稳分布

设 Q_n 为迟到达延迟进入的 $\mathrm{Geo}^{\xi}/G/1$ 中第 n 个顾客服务完(离开系统)时系统中的顾客数,A_n 为第 n 个顾客服务时间中到达的顾客数,则

$$Q_{N+1}=Q_n-\varepsilon(Q_N)+A_{n+1}+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n), \qquad (6.4.1)$$

其中 $\varepsilon(x)$ 由(6.3.3)式确定. 因为

$$A_{n+1}=\xi_1,\xi_2,\xi_3,+\cdots+\xi_{N(B_{n+1})}(\xi_0\equiv 0), \qquad (6.4.2)$$

其中 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,+\cdots$相互独立均与 ξ 同分布,所以

$$E(A_{n+1})=E(\xi_1)E[N(B_{n+1})]=\frac{\lambda r}{\mu}\triangleq\rho. \qquad (6.4.3)$$

为保证$\{Q_n, n\geqslant 1\}$的平稳分布存在，在一个顾客的服务时间里到达的顾客数的均值必须小于1，即$\rho=\frac{\lambda r}{\mu}<1$. 又由(6.4.2)知

$$\begin{aligned} D(A_{n+1}) &= E[N(B_{n+1})]D(\xi)+D[N(B_{N+1})]\{E(\xi_1)\}^2 \\ &= б_r^2\frac{\lambda}{\mu}+D[N(B_{n+1})]r^2 \\ &= \frac{\lambda}{\mu}б_r^2+r^2\Big[\frac{\lambda}{\mu}+\lambda^2(b^{(2)}-\frac{1}{\mu})-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\Big] \\ &= \frac{\lambda}{\mu}б_r^2+r\rho+\lambda^2r^2b^{(2)}-\lambda r\rho-\rho^2. \end{aligned} \qquad (6.4.4)$$

A_{n+1}的PGF(记为$A(Z)$)为

$$\begin{aligned} A(Z) &= E[Z^{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n(b_{n+1})}}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}[\lambda\xi(z)+\overline{\mu}]^nP\{B=N\} \\ &= B[\lambda\xi(Z)+\overline{\lambda}], \end{aligned} \qquad (6.4.5)$$

其中$\xi(Z)$为ξ的PGF. 由(6.4.1)式得

$$\begin{aligned} E[Z^{Q_{n+1}}] &= E[Z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+A_{n+1}+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}] \\ &= B[\lambda\xi(Z)+\overline{\lambda}]E[Z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]. \end{aligned} \qquad (6.4.6)$$

因为

$$\begin{aligned} & E[Z^{Q_n-\varepsilon(Q_n)+(\xi-1)\varepsilon(1-Q_n)}]P\{Q_n=k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}E[Z^{k-\varepsilon(k)+(\xi-1)\varepsilon(1-k)}]P\{Q_n=k\} \\ &= E[Z^{\xi-1}]P\{Q_n=0\}+\sum_{k=1}^{\infty}E[Z^{k-1}]P\{Q_n=k\} \\ &= \frac{1}{Z}\xi(Z)P\{Q_n=0\}+\frac{1}{z}\{E(Z^{Q_n})-P[Q_n=0]\} \\ &= \frac{1}{Z}P\{Q_n=0\}[\xi(Z)-1]+\frac{1}{Z}E[Z^{Q_n}], \end{aligned} \qquad (6.4.7)$$

记

$$\tilde{\pi}_R = \lim_{n\to\infty} P\{Q_n = k\}, \quad Q(Z) = \lim_{n\to\infty}(Z^{Q_n}),$$

在 $\rho<1$ 条件下,令 $n\to\infty$,由(6.4.7)式得

$$Q(Z) = \left\{\frac{\tilde{\pi}_0}{Z}[\xi(Z)-1] + \frac{Q(Z)}{Z}\right\}A(Z),$$

即

$$Q(Z) = \frac{\tilde{\pi}_0[1-\xi(Z)]B[\lambda\xi(Z)+\bar{\lambda}]}{B[\lambda\xi(Z)+\bar{\lambda}]-Z}. \tag{6.4.8}$$

令 $Z=1$,得

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{1-\rho}{r}. \tag{6.4.9}$$

从而

$$Q(Z) = \frac{(1-\rho)[1-\xi(Z)]B[\lambda\xi(Z)+\bar{\lambda}]}{rB[\lambda\xi(Z)+\bar{\lambda}]-rZ}, \tag{6.4.10}$$

且

$$\begin{aligned} E[Q] = Q'(1) &= \rho + \frac{E[\xi(\xi-1)] + r^3\lambda^2[b^{(2)} - \frac{1}{u}]}{2r(1-\rho)} \\ &= \rho + \frac{\sigma_r^2 + r^2 - r + \lambda^2 b^{(2)} - \mu r\rho^2}{2(1-\rho)}. \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

6.4.2 忙期

像 3.3.3 节那样,仍用 Θ 表示由一批(ξ 个)顾客引出的忙期,用 θ 表示由一个顾客引出的忙期.则有

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\xi}\theta, \tag{6.4.12}$$

$$\theta = B + \Theta_1 + \Theta\Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(B)}, \tag{6.4.13}$$

$$\Theta = U + \Theta_1 + \Theta_2\cdots + \Theta_{N(U)}, \tag{6.4.14}$$

其中

$$U = \sum_{i=1}^{\xi} B. \tag{6.4.15}$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \cdots$ 相互独立均与 Θ 同分布；$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \cdots$ 相互独立均与 θ 同分布. Θ, θ, U 的 PGF 分别为 $\Theta(Z), \theta(Z), U(Z)$. 则用类似于 3.3.3 节的方法，得

$$\Theta(Z) = \xi[\theta(Z)], \tag{6.4.16}$$

$$\theta(Z) = B[\lambda Z\Theta(Z) + \bar{\lambda}Z] = B\{\lambda Z\xi[\theta Z] + \bar{\lambda}Z\}, \tag{6.4.17}$$

$$U(Z) = \xi[B(Z)], \tag{6.4.18}$$

$$\Theta(Z) = U[\lambda Z\Theta(Z) + \bar{\lambda}Z] = \xi\{B[\lambda Z\Theta(Z) + \bar{\lambda}Z]\}, \tag{6.4.19}$$

且

$$E(\theta) = \frac{1}{\mu - \lambda r},\ \rho \triangleq \frac{\lambda \gamma}{\mu} < 1, \tag{6.4.20}$$

$$E(\Theta) = \frac{r}{\mu - r\lambda},\ \rho < 1, \tag{6.4.21}$$

$$D(\Theta) = \frac{6_r^2 + 2r^2 - r + r\mu^2 b^{(2)} - r\mu\rho^2 - r\rho}{\mu^2 (1-\rho)^3}, \quad \rho < 1, \tag{6.4.22}$$

$$D(\theta) = \frac{\rho 6_r^2 + 2r^2 - r + r\mu^2 b^{(2)} - r\mu\rho^2 - r\rho}{r\mu^2 (1-\rho)^3}, \quad \rho < 1. \tag{6.4.22'}$$

设 $\sum$ 表示在一个 Θ 中服务完的顾客数，M 表示在一个 θ 中服务完的顾客数，则

$$\sum = \sum_{i=1}^{\xi} M_i, \tag{6.4.23}$$

$$M = 1 + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \cdots + \sum\nolimits_{N(B)}, \tag{6.4.24}$$

$$\sum = \xi + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \cdots + \sum\nolimits_{N(U)}, \tag{6.4.25}$$

其中 $\sum_1, \sum_2, \sum_3, \cdots$ 相互独立均与 $\sum$ 同分布，$M_1, M_2, M_3 \cdots$ 相互独立均与 M 同分布，则有

$$\sum(Z)=\xi[M(Z)], \tag{6.4.26}$$

$$M(Z)=ZB\left[\lambda\sum(Z)+\bar{\lambda}\right]=ZB\{\lambda\xi[M(Z)]+\bar{\lambda}\}, \tag{6.4.27}$$

$$\sum(Z)=\xi\left\{ZB\left[\lambda\sum(Z)+\bar{\lambda}\right]\right\}, \tag{6.4.28}$$

且

$$E(\sum)=rE(M)=\frac{r}{1-\rho},\quad \rho<1, \tag{6.4.29}$$

$$E(M)=\frac{1}{1-\rho},\quad \rho<1. \tag{6.4.30}$$

因为

$$D(\sum)=\frac{\sigma_r^2-r\rho^2+r^2\rho+\lambda^2r^3b^{(2)}-\lambda\rho r^2}{(1-\rho)^3}$$

$$D(\sum)=\gamma D(M)+\sigma_r^2\,[E(M)]^2=\gamma D(M)+\frac{\sigma_r^2}{(1-\rho)^2}, \tag{6.4.31}$$

故

$$D(M)=\frac{1}{\gamma}\left[D(\sum)-\frac{\sigma_r^2(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\right]$$
$$=\frac{\rho\sigma_r^2-\gamma\rho^2+\gamma^2\rho+\lambda^2\gamma^3b^{(2)}-\lambda\gamma^2\rho}{\gamma(1-\rho)^3},\quad \rho<1. \tag{6.4.32}$$

6.4.3 等待时间的分布

设 W 为排队系统 $\mathrm{Geo}^{\xi}/G/1$ 的等待时间，$\rho<1$.

(1)FGFS 规则下 W 的分布

类似于 3.3.4 节，W 由两部分组成，一部分是该顾客所在批的等待时间，记为 W_f，另一部分是该顾客在批中的等待时间，记为 W_s，即

$$W=W_f+W_s. \tag{6.4.33}$$

因为 W_f 与 W_s 独立所以有

$$W(Z)=W_f(Z)W_s(Z). \tag{6.4.34}$$

因为系统 $\text{Geo}^{\xi}/G/1$ 的 W_f 可以看成为服务时为 $U=\sum_{i=1}^{\xi}B_i$ 的 $\text{Geo}/G/1$ 排队系统的等待时间，再由(6.3.35)式知，W_f 的 PGF 为

$$W_f(Z)=\frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda U(Z)+\bar{\lambda}-Z} \qquad [由(6.4.18)]$$

$$=\frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda\xi[B(Z)]+\bar{\lambda}-Z},\quad \rho=\frac{\lambda r}{\mu}<1 \tag{6.4.35}$$

在长为 ξ 的批队列中，设在该顾客之前的顾客数为 ξ，则 ξ 为取非负整数值的随机变量，且有

$$W_s(Z)=\sum_{i=1}^{\xi}B_i \quad (B_0\equiv 0). \tag{6.4.36}$$

由(3.3.51)式知，W_s 的 PGF 为

$$W_s(Z)=\xi[B(Z)]=\frac{1-\xi[B(Z)]}{r[1-B(Z)]}. \tag{6.4.37}$$

由(6.4.35)与(6.4.37)式，W 的 PGF 为

$$W(Z)=\frac{(1-\rho)(1-Z)}{\lambda\xi[B(Z)]+\bar{\lambda}-Z}\cdot\frac{1-\xi[B(Z)]}{r[1-B(Z)]} \tag{6.4.38}$$

且

$$E(W)=E(W_f)+E(W_s)=\frac{\lambda E(U^2)-\rho}{2(1-\rho)}+E(\xi)E(B)$$

$$=\frac{\sigma_r^2+r^2-r}{2r\mu}+\frac{\lambda E(U^2)-\rho}{2(1-\rho)}. \tag{6.4.39}$$

又因

$$E(U^2)=D(U)+[E(U)]^2=rD(B)+\sigma_r^2\frac{1}{\mu^2}+\frac{\gamma^2}{\mu^2}$$

$$=rb^{(2)}-\frac{r}{\mu^2}+\frac{\sigma_r^2}{\mu^2}+\frac{r^2}{\mu^2}, \tag{6.4.40}$$

故

$$E(W)=\frac{\sigma_r^2+r^2-r}{2r\mu}+\frac{\lambda r^2\mu^2b^{(2)}-\lambda r+\lambda r\sigma_r^2+\lambda r^3-r^2\mu}{2r\mu^2(1-\rho)}$$

$$= \frac{\lambda r^2\mu^2 b^{(2)} - \lambda r^2\mu + \mu\sigma_r^2 + r^2\mu - r\mu}{2r\mu^2(1-\rho)}$$

$$= \frac{\lambda r^2\mu b^{(2)} - \lambda r^2 + \sigma_r^2 + r^2 - r}{2r\mu(1-\rho)},\ \rho < 1. \tag{6.4.41}$$

(2)LCFS 规则下 W 的分布

类似于(1)有

$$W = W_f + W_s. \tag{6.4.42}$$

因为 W_f 和 W_s 独立，且当 $W_f > 0$ 时

$$W_f = B_+ + \Theta_1 + \cdots + \Theta_{N(B_+)}, \tag{6.4.43}$$

所以 W_f 的 PGF 为(设到达时系统空的概率为 π_0)

$$W_f(Z) = \pi_0 + (1-\pi_0)E[Z^{B_+} + \Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{N(B_+)}]$$

$$= \pi_0 + (1-\pi_0)B_+[\lambda Z\Theta(Z) + \bar{\lambda}Z]$$

$$= \pi_0 + (1-\pi_0)\frac{\mu\{1 - B[\lambda Z\Theta(Z) + \bar{\lambda}Z]\}}{1 - \lambda Z\Theta(Z) - \bar{\lambda}Z}. \tag{6.4.44}$$

§ 6.5 Geo/Geo/·系统的忙期

我们定义忙期为服务器(员)连续服务的时间间隔，定义 k 阶忙期为从系统中有 k 个信元(顾客)时起到系统空(没有顾客)时止这段时间，而定义 k 阶繁忙期为从系统中有 k 个信元在等待服务(不包括正在服务信元)时起到有一个服务器(服务台)空闲时止这段时间.忙期的长、k 阶忙期的长和 k 阶繁忙期的长分别记为 k，W_k，A_k.简称零阶繁忙期 A_0 为繁忙期，它被定义为从系统中所有服务台都进入服务时起到有一个服务台空闲时止这段时间.排队系统 Geo/Geo/·是这样的系统：(1)到达间隔时间序列$\{J_j, j\geqslant 1\}$是一个独立随机变量序列，$J_j \sim \mathrm{Geo}(\lambda_j)$，$\lambda_j$ 是系统状态(系统中的顾客数)j 的函数，(2)顾客的服务时间序列$\{B_{j,j}\geqslant 1\}$也是一个独立随机变量序列，$B_j \sim \mathrm{Geo}(\mu_j)$，$\mu_j$ 是系统状态 j 的函数；(3)每个服务台的服务时间独立同分布，均服从参数为 μ 的几何分布；(4)

$\{J_j, j \geqslant 1\}$和$\{B_j, j \geqslant 1\}$相互独立.因此,排队系统 Geo/Geo/· 包含了 Geo/Geo/n,Geo/Geo/n/n,Geo/Geo/n/N($n \leqslant N$),Geo/Geo/n/m/m($n \leqslant m$)和 Geo/Geo/∞等排队系统.

6.5.1 两个引理

引理 6.5.1 设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是 n 个独立随机变量,且 $B_j \sim$ Geo(μ_j),$j = 1,2,3\cdots,n$,则

$$\min(B_1, B_2 \cdots, B_n) \sim \text{Geo}(1 - \prod_{j=1}^{n} \overline{\mu_j}),$$

其中

$$\overline{\mu_j} = 1 - \mu, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

证明是简单的.

引理 6.5.2 设 A_0 是排队系统 Geo/Geo/n 的繁忙期.则 A_0 的 PGF 为

$$A_0(Z) = \frac{\sigma[\lambda Z + \lambda Z A_0(Z)]}{1 - \overline{\sigma}[\overline{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}, \quad \lambda < \sigma, \qquad (6.5.1)$$

且

$$E(A_0) = \frac{1}{\sigma - \lambda}, \ D(A_0) = \frac{\sigma\overline{\sigma} + \lambda\overline{\lambda}}{(\sigma - \lambda)^3}, \quad \lambda < \sigma, \quad (6.5.2)$$

其中 $\sigma = 1 - \overline{\mu}^n, \overline{\sigma} = 1 - \sigma$.

证明与定理 2.3.5 的证明类似.

6.5.2 Geo/Geo/· 系统的忙期

定理 6.5.1 设 W_j 是排队系统 Geo/Geo/· 的 j 阶忙期,$W_j(Z)$是 W_j 的 PGF,则

$$\begin{cases} W_j(Z) = \dfrac{Z}{1 - \overline{\lambda}_j\overline{\mu}_j Z}[\lambda_j\overline{\mu}_j W_{j+1}(Z) + \lambda_j\mu_j W_j(Z) \\ \qquad + \overline{\lambda}_j\mu_j W_{j-1}(Z)], j \geqslant 1; \\ W_0(Z) = 1. \end{cases} \qquad (6.5.3)$$

证 设 α_j 是从系统中的顾客数变为 j 时起一直到有一个顾

客到达系统时止这段时间，β_j 是从系统中的顾客数变为 j 时起一直到有一个顾客服务完离开系统时止这段时间，由几何分布无记忆性和独立性假设知 $\alpha_j \sim \text{Geo}(\lambda_j)$，$\beta_j \sim \text{Geo}(\mu_j)$，且 α_j 与 β_j 独立，由引理 6.5.1 知 $\min(\alpha_j, \beta_j) \sim \text{Geo}(1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j)$. 因为从系统中的顾客数变为 j 时起，经过时间 $\min(\alpha_j, \beta_j)$后，系统中的顾客必定要发生变化，或者 $j \to j+1$，或者 $j \to j-1$，或者 $j \to j$，所以由全数学期望公式，有

$$
\begin{aligned}
W_j(Z) = E(Z^{W_j}) &= E[Z^{\min(\alpha_j,\beta_j)}][E(Z^{W_j} \mid \alpha_j < \beta_j)P\{\alpha_j < \beta_j\} \\
&\quad + E(Z^{W_j} \mid \alpha_j = \beta_j)P\{\alpha_j = \beta_j\} \\
&\quad + E(Z^{W_j} \mid \alpha_j > \beta_j)P\{\alpha_j > \beta_j\}] \\
&= \frac{(1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j)Z}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j Z}\Big[W_{j+1}(Z)\frac{\lambda_j\bar{\mu}_j}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j} + W_{j-1}(Z)\frac{\lambda_j\mu_j}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j} \\
&\quad + W_{j-1}(Z)\frac{\lambda_j\mu_j}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}\Big] \\
&= \frac{Z}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j Z}[\lambda_j\bar{\mu}_j W_{j+1}(Z) + \lambda_j\mu_j W_j(Z) + \bar{\lambda}_j\mu_j W_{j-1}(Z)] .
\end{aligned}
$$

又显然有 $W_0(Z)=1$，从而定理 6.5.1 得证.

定理 6.5.2 设 $E(W_j)=\omega_j$，$E(W_j^2)=g_j$，$j \geqslant 0$，则当 $\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i < \infty$，$\sup_{j\geqslant 0}\{\lambda_j\bar{\mu}_j\} < \infty$，$\sum_{i=1}^{\infty}\rho_i\omega_i < \infty$ 时，有

$$E(\theta_1) = \omega = \sum_{i-1}^{\infty}\rho_i, \tag{6.5.4}$$

$$E(\theta^2) = g_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i(2\omega_i - 1), \tag{6.5.5}$$

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{\infty}\rho_i + \sum_{m=1}^{j-1}\Big(\prod_{k=1}^{m}\frac{\bar{\lambda}_k u_k}{\lambda_k\bar{\mu}_k}\Big)\sum_{i=m+1}^{\infty}\rho_i, \quad j \geqslant 1, \tag{6.5.6}$$

$$g_j = g_1 + g_1\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{\lambda_i\bar{u}_i\rho_i} + \sum_{m=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-2\omega_i)}{\lambda_m\bar{\mu}_m\rho_m} \tag{6.5.7}$$

其中 $$\rho_1 = \frac{1}{\bar{\lambda}_1\mu_1}, \quad \rho_i = \frac{\lambda_1\bar{\mu}_1\lambda_2\bar{u}_2\cdots\lambda_{i-1}\bar{u}_{i-1}}{\bar{\lambda}_1\mu_1\bar{\lambda}_2\mu_2\cdots\bar{\lambda}_i\mu_i}, \quad i \geqslant 2 . \tag{6.5.8}$$

证　在(6.5.3)的两边关于 Z 取一、二阶导数后，令 $Z=1$，并利用公式 $\omega_j=W_j'(1)$，$g_j=W_j''(1)+W_j'(1)$，得

$$\omega_j=\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}+\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}(\lambda_j\bar{\mu}_j\omega_{j+1}+\lambda_j\mu_j\omega_j+\bar{\lambda}_j\mu_j\omega_{j-1}),\tag{6.5.9}$$

$$W_j''(1)=\frac{2\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}{(1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j)^2}+\frac{2}{(1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j)^2}(\lambda_j\bar{\mu}_j\omega_{j+1}+\lambda_j\mu_j\omega_j+\bar{\lambda}_j\mu_j\omega_{j-1})$$
$$+\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}[\lambda_j\bar{\mu}_jW''_{j+1}(1)+\lambda_j\mu_jW''_j(1)+\bar{\lambda}_j\mu_jW''_{j-1}(1)].\tag{6.5.10}$$

(6.5.9)和(6.5.10)两边分别相加，得

$$g_j=\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}(\lambda_j\bar{\mu}_jg_{j+1}+\lambda_j\mu_jg_j+\bar{\lambda}_j\mu_jg_{j-1})+\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}+\frac{2\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}{(1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j)^2}$$
$$+\frac{2}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}\left(\omega_j-\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}\right),$$

即

$$g_j=\frac{1}{1-\bar{\lambda}_j\bar{\mu}_j}(\lambda_j\bar{\mu}_jg_{j+1}+\lambda_j\mu_jg_j+\bar{\lambda}_j\mu_jg_{j-1}+2\omega_j-1)\tag{6.5.11}$$

由(6.5.9)得

$$\omega_{j+1}-\omega_j=-\frac{1}{\lambda_j\bar{\mu}_j}+\frac{\bar{\lambda}_j\mu_j}{\lambda_j\bar{\mu}_j}(\omega_j-\omega_{j-1}).\tag{6.5.12}$$

令 $Z_j=\omega_{j+1}-\omega_j$，$a_j=\lambda_j\bar{\mu}_j$，$b_j=\bar{\lambda}_j\mu_j$，$j\geqslant0$，得

$$Z_j=-\frac{1}{a_j}+\frac{b_j}{a_j}Z_{j-1},\quad j\geqslant1.$$

因为 $\omega_0=0$，$\therefore Z_0=\omega_1=E(\theta)$．递推得

$$Z_j=\frac{1}{a_j\rho_j}\sum_{i=1}^{j}\rho_i+\frac{\omega_1}{a_j\rho_j}.\tag{6.5.13}$$

因为 $Z_j\geqslant0$，所以 $\omega_1\geqslant\sum\limits_{i=1}^{j}\rho_i$．如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\rho_i=\infty$，则 $\omega_j\geqslant\omega_1\geqslant\infty$；如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\rho_i<\infty$，设

$$u_n = \frac{Z_n a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n},\ n \geqslant 1,\ u_0 = Z_0 = \omega_1,$$

则

$$\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} u_n = Z_n = -\frac{1}{a_n} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{a_1 a_2 \cdots a_n} u_{n-1}.$$

故

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{1}{a_n} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n} < 0,\ n \geqslant 1,$$

因此 $0 \leqslant u_n < u_{n-1}, n \geqslant 1$, ,从而 $\lim_{n\to\infty} u_n$ 存在. 又因为 $u_0 - u_n = \sum_{i=1}^{n} \rho_i$,所以

$$\omega_1 = u_0 = \lim_{n\to\infty} u_n + \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty. \qquad (6.5.14)$$

注意到 $u_n = Z_n \rho_n \lambda_n \bar{\mu}_n$, $\sum_{i=1}^{\infty} \rho_i < \infty$ 和 $\sup_{n\geqslant 0}\{\lambda_n \bar{\mu}_n\} < \infty$,有 $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$. 因为系统 Geo/Geo/· 的嵌入马氏链是不可约、非周期正常返的,所以 $0 < \omega_n < \infty, n \geqslant 1$,从而 $\omega_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} Z_i < \infty$. 于是 $\sup_{n\geqslant 1}\{Z_n\} < \infty$,且 $\lim_{n\to\infty} u_n u_n = 0$. 由(6.5.14)立得(6.5.4). 由(6.5.12)得 $\omega_j = \frac{1}{a_{j-1}\rho_{j-1}} \sum_{i=j}^{\infty} \rho_i + \omega_{j-1}$,递推可得(6.5.5). 由(6.5.11)得

$$\begin{aligned} g_{j+1} - g_j &= \frac{1 - 2\omega_j}{a_j} + \frac{b_j}{a_j}(g_j - g_{j-1}) \\ &= \frac{1}{a_j \rho_j} \sum_{i=1}^{j} \rho_i (1 - 2\omega_i) + \frac{1}{a_j \rho_j} g_1. \end{aligned} \qquad (6.5.15)$$

比较(6.5.15) 与(6.5.13),得

$$E(\theta^2) = g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (2\omega_i - 1)\rho_i = \sum_{i=1}^{\infty} 2\omega_i \rho_i - \omega_1,$$

$$(6.5.16)$$

由(6.5.15) 得

$$g_j = g_1 + g_1 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{a_i \rho_i} + \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho_i (1 - 2\omega_i)}{a_m \rho_m}.$$

这样,定理 2 得证.

6.5.3 例子与应用

(1)Geo/Geo/n 系统的忙期

这时 $\lambda_j = \lambda, j \geqslant 0, \mu_j = \begin{cases} 1 - \overline{\mu}^j, & 1 \leqslant j < n, \\ 1 - \overline{\mu}^n, & j \geqslant n \end{cases}$

且 $W_n = W_{n-1} + A_0$. 易见 W_{n-1}与 A 独立. 由引理 6.5.2 和定理 6.5.1,(6.5.3)变为

$$\begin{cases} W_j(Z) = \dfrac{Z}{1 - \overline{\lambda} \cdot \overline{\mu}^j Z} [\lambda \overline{\mu}^j W_{j+1}(Z) + \lambda (1 - \overline{\mu}^j) W_j(Z), \\ \qquad + \overline{\lambda} (1 - \overline{\mu}^j) W_{j-1}(Z)], \qquad 1 \leqslant j < n, \\ W_n(Z) = W_{n-1}(Z) A_0(Z), \\ W_0(Z) \neq 1, \end{cases} \tag{6.5.17}$$

其中

$$A_0(Z) = \frac{(1 - \overline{\mu}^n)[\overline{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}{1 - \overline{\mu}^n [\overline{\lambda} Z + \lambda Z A_0(z)]}. \tag{6.5.18}$$

(a)对于 Geo/Geo/1 系统,(6.5.17)变为

$$W_1(Z) = A_0(Z) \frac{\mu [\overline{\lambda} Z + \lambda Z W_1(Z)]}{1 - \overline{\mu} [\overline{\lambda} Z + \lambda Z W_1(Z)]}. \tag{6.5.19}$$

由(2)得

$$E(\theta) = \omega_1 = \frac{1}{\mu - \lambda}, D(\theta) = \frac{\mu \overline{\mu} + \lambda \overline{\lambda}}{(\mu - \lambda)^3}, \lambda < \mu.$$

(b)对于 Geo/Geo/2 系统,(6.5.17)变为

$$W_1(Z) = \frac{Z}{1 - \overline{\lambda} \cdot \overline{\mu} Z} [\lambda \overline{\mu} W_1(Z) A_0(Z) + \lambda \mu W_1(Z) + \overline{\lambda} \mu], \tag{6.5.20}$$

$$A_0(Z) = \frac{(1 - \overline{\mu}^2)[\overline{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}{1 - \overline{\mu}^2 [\overline{\lambda} Z + \lambda Z A_0(Z)]}. \tag{6.5.21}$$

解(6.5.20),得

$$W_1(Z)=\frac{\bar{\lambda}\mu Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z-\lambda\mu Z-\lambda\bar{\mu}ZA_0(Z)}.\qquad(6.5.22)$$

由(6.5.22)与(6.5.21)或由(6.5.4)得

$$E(\theta)=\omega_1=\frac{\bar{\lambda}+\bar{\mu}}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}-\bar{\mu}^2)}.\qquad(6.5.23)$$

(c)对于 Geo/Geo/3,(6.5.17)变为

$$\begin{cases}W_1(Z)=\dfrac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z}[\lambda\bar{\mu}W_2(Z)+\lambda\mu W_1(Z)+\bar{\lambda}\mu],\\ W_2(Z)=\dfrac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z}[\lambda\bar{\mu}^2W_2(Z)A_0(Z)\\ \qquad+\lambda(1-\bar{\mu}^2)W_2(Z)+\bar{\lambda}(1-\bar{\mu}^2)W_1(Z)],\end{cases}\qquad(6.5.24)$$

且

$$A_0(Z)=\frac{(1-\bar{\mu}^3)[\bar{\lambda}Z+\lambda ZA_0(Z)]}{1-\bar{\mu}^3[\bar{\lambda}Z+\lambda ZA_0(Z)]}.\qquad(6.5.25)$$

解之得

$$W_1(Z)=\theta(Z)$$

$$=\frac{\mu[Z-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z^2-\lambda(1-\bar{\mu}^2)Z^2-\lambda\bar{\mu}^2Z^2A_0(Z)]}{1-[\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}+\lambda(1-\bar{\mu}^2)+\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}]Z+\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^3Z^2+\lambda\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^3Z^2A_0(Z)},\qquad(6.5.26)$$

且

$$E(\theta)=\frac{\bar{\lambda}(1-\bar{\mu}^2)(\bar{\lambda}-\bar{\mu}^3)+\lambda\bar{\mu}(\bar{\lambda}-\bar{\mu}^3)+\lambda^2\bar{\mu}^3}{\bar{\lambda}^2\mu(1-\bar{\mu}^2)(\bar{\lambda}-\bar{\mu}^3)}.\qquad(6.5.27)$$

(2)Geo/Geo/n/n 系统的忙期

这时,$\lambda_j=\lambda$,$j=0,1,2\cdots n-1$,$\mu_j=1-\bar{\mu}^j$,$j=0,1,2,\cdots,n$ 且 $W_n=A_0+W_{n-1}$,$A_0\sim\text{Geo}(1-\bar{\mu}^n)$,$W_{n-1}$与 A_0 独立.(6.5.3)变为

$$
\begin{cases}
W_j(Z)=\dfrac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^j Z}[\lambda\bar{\mu}^j W_{j+1}(Z)+\lambda(1-\bar{\mu}^j)W_j(Z)+\bar{\lambda}(1-\bar{\mu}^j) \\
\qquad\cdot W_{j-1}(Z)],\ j=1,2,\cdots,n-1, \\
W_n(Z)=W_{n-1}(Z)\dfrac{(1-\bar{\mu}^n)Z}{1-\bar{\mu}^n Z}, \\
W_0(Z)=1 .
\end{cases}
\tag{6.5.28}
$$

(a)对于 Geo/Geo/2/2 系统,(6.5.28)变为

$$
W_1(Z)=\frac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z}\left[\lambda\bar{\mu}W_1(Z)\frac{(1-\bar{u}^2)Z}{1-\bar{\mu}^2Z}+\lambda\mu W_1(Z)+\bar{\lambda}\mu\right].
$$

解之得

$$
W_1(Z)=\frac{\bar{\lambda}\mu Z(1-\bar{\mu}^2Z)}{(1-\bar{\mu}^2Z)(1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z-\lambda\mu Z)-\lambda\bar{\mu}Z(1-\bar{\mu}^2)Z},
\tag{6.5.29}
$$

$$
E(\theta)=\omega_1=\frac{\bar{\lambda}+\bar{\mu}}{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}-\bar{\mu}^2)}.
\tag{6.5.30}
$$

(b)对 Geo/Geo/3/3 系统,(6.5.28)变为

$$
\begin{cases}
W_1(Z)=\dfrac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z}[\lambda\bar{\mu}W_2(Z)+\lambda\mu W_1(Z)+\bar{\lambda}\mu], \\
W_2(Z)=\dfrac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z}\Big[\lambda\bar{\mu}^2W_2(Z)\dfrac{(1-\bar{\mu}^3)Z}{1-\bar{\mu}^3Z} \\
\qquad+\lambda(1-\bar{\mu}^2)W_2(Z)+\bar{\lambda}(1-\bar{\mu}^2)W_1(Z)\Big].
\end{cases}
\tag{6.5.31}
$$

解之得

$$
W_1(Z)=\frac{\bar{\lambda}\mu ZP(Z)}{(1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z)P(Z)-\lambda\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z^2(1-\bar{\mu}^3Z)-\lambda\mu ZP(Z)},
\tag{6.5.32}
$$

其中

$$
P(Z)=(1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z)(1-\bar{\mu}^3Z)-\lambda\bar{\mu}^2(1-\bar{\mu}^3)Z^2
$$
$$
-\lambda(1-\bar{\mu}^2)(Z-\bar{\mu}^3Z^2).
$$

由(6.5.4)得

$$
E(\theta)=\frac{(1-\bar{\mu}^3)(\bar{\lambda}^2-\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^2+\lambda\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu})+\lambda^2\bar{\mu}^3}{\bar{\lambda}^3\mu(1-\bar{\mu}^2)(1-\bar{\mu}^3)}.
\tag{6.5.33}
$$

(3)Geo/Geo/n/N($n\leqslant N$)系统的忙期

这时,$\lambda_j=\lambda, j=0,1,2\cdots,N-1, \mu_j=\begin{cases}1-\overline{\mu}^j, & j=1,2\cdots,n-1,\\ 1-\overline{\mu}^n, & j=n,n+1,\cdots,N.\end{cases}$

(6.5.3)变成

$$\begin{cases}W_j(Z)=\dfrac{Z}{1-\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}^jZ}[\lambda\,\overline{\mu}^jW_{j+1}(Z)+\lambda(1-\overline{\mu}^j)W_j(Z)\\ \qquad+\overline{\lambda}(1-\overline{\mu}^j)W_{j-1}(Z)],1\leqslant j\leqslant n-1\\ W_j(Z)=\dfrac{Z}{1-\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}^nZ}[\lambda\,\overline{\mu}^nW_{j+1}(Z)+\lambda(1-\overline{\mu}^n)W_j(Z)\\ \qquad+\overline{\lambda}(1-\overline{\mu}^n)W_{j-1}(Z)],n\leqslant j\leqslant N-1\\ W_N(Z)=W_{n-1}(Z)\dfrac{(1-\overline{\mu}^n)Z}{1-\overline{\mu}^nZ},\\ W_0(Z)=1.\end{cases} \tag{6.5.34}$$

(a)对于 Geo/Geo/1/2 系统(6.5.34)变为

$$W_1(Z)=\frac{Z}{1-\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}Z}\left[\lambda\,\overline{\mu}W_1(Z)\frac{\mu Z}{1-\overline{\mu}Z}+\lambda\mu W_1(Z)+\overline{\lambda}\mu\right]. \tag{6.5.35}$$

解之,得

$$W_1(Z)=\frac{\overline{\lambda}\mu Z(1-\overline{\mu}Z)}{1-\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}Z-\overline{\mu}Z-\lambda\mu Z+\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}^2Z^2}, \tag{6.5.36}$$

且

$$\mathrm{E}(W_1)=E(\theta)=\frac{\lambda+\mu-\lambda\mu}{\overline{\lambda}\mu^2}. \tag{6.5.37}$$

(b)对于 Geo/Geo/1/3 系统(6.5.34)变成

$$\begin{cases}W_1(Z)=\dfrac{Z}{1-\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}Z}[\lambda\,\overline{\mu}W_2(Z)+\lambda\mu W_1(Z)+\overline{\lambda}\mu],\\ W_2(Z)=\dfrac{Z}{1-\overline{\lambda}\cdot\overline{\mu}Z}\left[\lambda\,\overline{\mu}W_2(Z)\dfrac{\mu Z}{1-\overline{\mu}Z}+\lambda\mu W_2(Z)+\overline{\lambda}\mu W_1(Z)\right].\end{cases} \tag{6.5.38}$$

解之得

$W_1(Z)=$

$$\frac{\bar{\lambda}\mu Z(1-2\bar{\mu}Z+\lambda Z+\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z^2)}{1-(3\bar{\mu}-2\lambda)Z+(\lambda^2\mu^2+\lambda\mu\bar{\mu}+2\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2+\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^2+\lambda\mu\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu})Z^2-\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^3Z^3}. \tag{6.5.39}$$

$$E(\theta)=E(W_1)=\frac{\bar{\lambda}^2\mu^2+\bar{\lambda}\mu+\lambda^2\bar{\mu}^2}{\bar{\lambda}^3\mu^3}. \tag{6.5.40}$$

(4)Geo/Geo/$n/m/m$ 系统的忙期

这时,

$$\lambda_j=(m-j)\lambda,j=0,1,2,\cdots,m,\mu_j=\begin{cases}1-\bar{\mu}_j,\ j=1,2,\cdots n-1,\\ 1-\bar{\mu}^n,\ j=n,n+1,\cdots,m.\end{cases}$$

(6.5.3)变为

$$\begin{cases}W_j(Z)=\dfrac{Z}{1-[1-(m-j)\lambda]\bar{\mu}^jZ}[(m-j)\lambda\cdot\bar{\mu}^jW_{j+1}(Z)+(m-j)\lambda(1-\bar{\mu}^j)\\ \qquad\cdot W_j(Z)+[1-(m-j)\lambda](1-\bar{\mu}^j)W_{j-1}(Z)],\ j=1,2,\cdots,n-1,\\ W_j(Z)=\dfrac{Z}{1-[1-(m-n)\lambda]\bar{\mu}^nZ}[(m-n)\lambda\bar{\mu}^nW_{j+1}(Z)+(m-n)\lambda(1-\bar{\mu}^n)\\ \qquad\cdot W_j(Z)+[1-(m-n)\lambda](1-\bar{\mu}^n)W_{j-1}(Z)],j=n,n+1,\cdots,m-1,\\ W_m(Z)=W_{m-1}(Z)\dfrac{(1-\bar{\mu}^n)Z}{1-\bar{\mu}^nZ},\\ W_0(Z)=1.\end{cases} \tag{6.5.41}$$

(a)对于 Geo/Geo/1/2/2,(6.5.41)变为

$$W_1(Z)=\frac{Z}{1-\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}Z}\left[\lambda\bar{\mu}W_1(Z)\frac{\mu Z}{1-\bar{\mu}Z}+\lambda\mu W_1(Z)+\bar{\lambda}\mu\right]. \tag{6.5.42}$$

解之,得

$$W_1(Z)=\frac{\bar{\lambda}\mu Z(1-\bar{\mu}Z)}{1-\bar{\lambda}\bar{\mu}Z-\lambda\mu Z-\bar{\mu}Z+\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}^2Z^2},$$

且

$$E(\theta)=E(W_1)=\frac{\lambda+\mu-\lambda\mu}{\bar{\lambda}\mu^2}. \tag{6.5.43}$$

参 考 文 献

[1] 孙荣恒.应用概率论.科学出版社,1998年

[2] 徐光煇.随机服务系统.科学出版社,1980年

[3] 华兴(美).排队论与随机服务系统.上海翻译出版公司,1987年

[4] 孙荣恒.随机过程及其应用.1999年重庆大学

[5] Hideaki Takagi. Queueing Analysis. North - Holland, Amsterdam, 1991

[6] Leonard Kleinrock. Queueing Systems. JohnWiley&sons, New York, 1975

[7] 孙荣恒.关于随机服务系统 k 阶忙期的一个注记.重庆大学学报,1993,16(3)

[8] 孙荣恒.排队系统 $M/M/\cdot$ 的平均忙期.重庆大学学报,1997,20(4)

[9] 孙荣恒,孙宇.排队系统 $Geo/M/n$ 的 k 阶忙期.重庆大学学报,1998,21(5)

[10] 孙荣恒.$Er/M/1$ 排队系统的忙期.重庆大学学报,1998,21(5)

[11] Cohen, J. W. The Single Server Queue, Revised edition. North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1982

[12] Cooper R. B. Introduction to Queueing Theory, Second edition, North-Holland Publishing Company, 1981

[13] Hunter, J. J. Mathematical Technigues of Applications, Academic Press, New York, 1983

[14] 孙荣恒,李福建.间断泊松过程的迭加过程的参数计算.电子学报,1988,26(4)

[15] Li Fujian, Sun Rongheng. Measurement-Estimation Approach to Efficiency Evaluationof Bandwidth Allocation Scheme in ATM Networks, Conference Record Vol. 2 of 3. IEEE Internation Conference on Cummunications, 1997.6

[16] Sun Rongheng. Asymmetric Exhaustive Service Polling System with Bernoulli Feedback, Conference Record, International Workshop on Markov Processes&Controlled Markov Chains, 1999.8

[17] 孙荣恒,雷玉浩.关于 $M/G/1$ 系统等待时间的一个注记.重庆大学学报,1999,22(1)

[18] 孙荣恒.$Er/M/1$ 排队系统的忙期.重庆大学学报,1998.9

[19] 雷玉浩,孙荣恒.批到达客尽服务轮询系统分析.重庆大学学报,1999.11

现代数学基础丛书



